جبر

برای سال سوم دبیرستان



توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

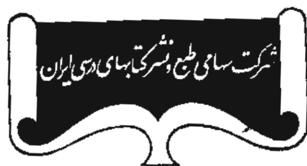
توانا بود هرکه دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر

برای سال سوم دبیرستانها

چاپ و توزیع از :



۱۳۵۲





این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : حسین بحرانی ،
محمدتقی زاوشی، دکتر محمد علی مجتهدی، دکتر هوشنگ
منتصری نگارش‌یافته، برطبق مادهٔ ۳ قانون‌کتابهای درسی
واساسنامهٔ سازمان‌کتابهای درسی ایران برای تدریس در
دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ به طریق افست از چاپخانهٔ سپهر

فهرست مندرجات

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$
$$(a+b)(a^2+b^2-ab) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-b^3$$

۲ـ تجزیهٔ عبارات به حاصل‌ضرب عاملها

الف ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل ضرب عاملها وقتی که جمله‌های آن ، عامل مشترکی داشته باشند : در این حال ، خارج قسمت چند جمله‌ای را بر **عامل** مشترک تعیین کرده و حاصل ضرب عامل مشترک در **خارج قسمت** را برابر چند جمله‌ای قرار می‌دهند .

مثال ۱ :

$$8ax + 4ay - 12az + 4a^2 = 4a(2x + y - 3z + a)$$

مثال ۲ :

$$3a^2b^4x - 6a^3b^2x^2 + 12ab^2x^3 = 3ab^2x(ab^2 - 2a^2x + 4x^2)$$

ب ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل ضرب عاملها از راه دسته‌بندی جمله‌ها .

مثال ۱ : $4a - 4b + ax - bx - ay + by =$

$$4(a-b) + x(a-b) - y(a-b) = (a-b)(4+x-y)$$

مثال ۲ : $a^2bx + 4ax - ab^2y - 4by - abz - 4z =$

$$ax(ab+4) - by(ab+4) - z(ab+4) = (ab+4)(ax - by - z)$$

ج ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل‌ضرب عاملها با استفاده از اتحادهای : $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

مثال ۱ : $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

مثال ۲ : $2ay^2 - 4a^2y + 2a^3 = 2a(y^2 - 2ay + a^2) = 2a(y-a)^2$

د ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل‌ضرب عاملها با استفاده از اتحاد : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

مثال ۱ : $9 - x^2 = (3+x)(3-x)$

مثال ۲ : $a^4b^4 - 16 = (a^2b^2+4)(a^2b^2-4) = (a^2b^2+4)(ab+2)(ab-2)$

مثال ۳ : $(x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y)$

مثال ۴ :

$$(2a+3)^2 - (a-4)^2 = (2a+3+a-4)(2a+3-a+4) = (3a-1)(a+7)$$

ه ـ تجزیهٔ چند جمله‌ای به‌حاصل ضرب عاملها با استفاده از اتحاد : $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

مثال ۱ : برای تجزیهٔ عبارت x^2+4x+3 به حاصل‌ضرب عاملها ، باید دو عدد بقسمی یافت که مجموع آنها ۴+ و حاصل ضربشان ۳+ باشد . این **دو** عدد ۳+ و ۱+ می‌باشند ، پس :

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

مثال ۲ : برای **تجزیهٔ** عبارت $a^2 - 7a + 12$ به حاصل ضرب عاملها ، باید دوعدد بقسمی یافت که مجموع آنها ۷− و حاصل ضربشان ۱۲+ باشد . این دوعدد ۴− و ۳− می‌باشند ، پس :

$$a^2 - 7a + 12 = (a-4)(a-3)$$

مثال ۳ : $y^2 - 2y - 15 = (y-5)(y+3)$

و ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل‌ضرب عاملها با استفاده از اتحادهای : $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

مثال ۱ : $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

مثال ۲ : $1 - y^3 = 1^3 - y^3 = (1-y)(1+y+y^2)$

ز ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از عامل مشترک قرار دادن، دسته‌بندی کردن و اتحادها .

مثال ۱ : برای تجزیهٔ عبارت $a^4x^2 - a^4 - b^4x^2 + b^4$ به حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$a^4x^2 - a^4 - b^4x^2 + b^4 = a^4(x^2-1) - b^4(x^2-1)$$
$$= (x^2-1)(a^4-b^4)$$
$$= (x+1)(x-1)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$
$$= (x+1)(x-1)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

مثال ۲ : برای تجزیهٔ عبارت :

$$a^2x^2 + 2a^2x + a^2 - b^2x^2 - 2b^2x - b^2$$

به حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$a^2x^2 + 2a^2x + a^2 - b^2x^2 - 2b^2x - b^2 =$$
$$a^2(x^2+2x+1) - b^2(x^2+2x+1) =$$
$$a^2(x+1)^2 - b^2(x+1)^2 =$$
$$(x+1)^2(a^2-b^2) = (x+1)^2(a+b)(a-b)$$

مثال ۳ : برای تجزیهٔ عبارت :

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

به حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) =$$
$$x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2(x-y) =$$
$$xy(x-y) - z(x^2-y^2) + z^2(x-y) =$$

$$xy(x-y) - z(x+y)(x-y) + z^2(x-y) =$$
$$(x-y)[xy - z(x+y) + z^2] =$$
$$(x-y)(xy - xz - yz + z^2) =$$
$$(x-y)[x(y-z) - z(y-z)] =$$
$$(x-y)(y-z)(x-z)$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

-۱ $-3x^3 + xy^2 + 7y^3 + (2x^3 - 5xy^2) - (-5x - 3x^2y + y^3)$

-۲ $5a^3 - (11ab^2 + 12ac^2) - (7b^3 + 2ab^2 - 4ac^2) - (ac^2 + a^3)$

-۳ $(4a-b) - (3b-8) + (5c-b) - (-4c+b) + c - a$

-۴ $7a - 2b - [a - (2a-b) + (2b-c)] - (5a-b-c)$

-۵ $-(a^2x^2 - 5ax) + ax^2 - (7ax + a^2x^2 - 9ax^2) - a^2x^2$

-۶ $\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}ax + \frac{3}{11}x^2 + \frac{2}{3}ax - ax + x^2$

ضربهای زیر را انجام دهید :

-۷ $-3a^2b(2ab + 3b^2 - 4a)$

-۸ $(3x^2 - 5x + 3)(x^2 - 1)$

-۹ $(a^2$ [illegible] $a + 1)(a^4 - 1)$

-۱۰ $(\frac{2}{3}xy - x^2)(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y)$

-۱۱ $(2ax^2 - 5ax + a)(4ax + a)$

-۱۲ $(3xy - 5y^2 + 7x)(x - 2y)$

-۱۳ $(3x^2 - 8x + 4)(3x^2 + 9x - 2)$

-۱۴ $-(a-b-c)(a-b+c)(a-b)$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید :

-۱۵ $(2x-5)(x-2)-(4x+1)(7x+5)$

-۱۶ $2x(x^2-a)+2a(x-x^2)-(6x+a)(x^2-a)$

-۱۷ $(x^2-4)(x^2+3)-(3x^2+5)(4-x^2)+2x^4-5x^2$

-۱۸ $(x+3y-z)(x+3y+z)-(4y+z)(z-y)$

-۱۹ $(ax^2-5ax)(4ax^2+7ax)+a^2x^2(x-a)-4ax^4$

-۲۰ $-3(x^2-2xy+y^2)(x+y)-3(x^2+y^2+2xy)(x-y)$

تقسیمهای زیر را بجا آورید :

-۲۱ $(x^3-6x^2+5x+6) : (x-2)$

-۲۲ $(x^3-x^2+x-1) : (x-1)$

-۲۳ $(a^5+5a^3b^2-5a^2b^3-b^5) : (a^2-3ab-b^2)$

-۲۴ $(a^5x^5+y^5) : (ax+y)$

-۲۵ $(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2) : (\frac{4}{3}x-2)$

حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

-۲۶ $(2x-7)^2+(3x+5)^2-(x+2)(x-2)$

-۲۷ $(ab+4c)^2-(2ab+c)^2-(5+c)(5-c)$

-۲۸ $(x+y-z)^2+(2x-y)^2-(y+z)^2$

-۲۹ $(a-b)^2+(a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2$

-۳۰ $(x+4)^2(x-4)^2-(x^2-5)(x^2-5)$

-۳۱ $(1+2a-3b)^2-(3b-2a-1)^2$

-۳۲ $(2x+y-a)^2-(x-y+2a)^2+(a-y)^2$

-۳۳ $(2a+x)^2-(x-4a)+2a^3-x^3$

-۳۴ $(x^2-8xy)(x^2+8xy)-(2x^2-y^2)^2$

-۳۵ $(a^2+b^2-5)(a^2-b^2+5)-(2a^2-b^2+1)^2$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید :

-۳۶ $7a^3b^2-5a^2b^4+2ab^5-ab^2$

-۳۷ $12a^2b^3-3a^3b^2+18ab^4-42a^4b$

-۳۸ $5a^2(x+y)-8b^2(x+y)-12(x+y)$

-۳۹ $12(a+b)-8(a+b)^2$

-۴۰ $(a+b+c)^2-a(a+b+c)-(a+b+c)$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید :

-۴۱ a^3+2a^2-2a-4

-۴۲ $2ax+4a-bx-2b$

-۴۳ $ac-ad+bc-bd$

-۴۴ $6x^3-6mx^4-3m^3x+3m^2$

-۴۵ $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b$

-۴۶ $x^4-cx^3+acx-ax^2-bcx+bx^2-abx+abc$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید :

-۴۷ $4x^2-25y^2$ -۴۸ $9a^2b^2-16c^2d^2$

-۴۹ $\frac{1}{4}-\frac{9}{4}x^2y^2$ -۵۰ $4a^4-b^2$

-۵۱ $(2a+1)^2-9b^2$ -۵۲ $(2m-1)^2-(m-1)^2$

-۵۳ $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$

-۵۴ $x^2+2xy+y^2-z^2$

-۵۵ $a^2-6a+9-4b^2$ -۵۶ $x^2-y^2+4y-4x$

-۵۷ $9a^2b^2-25x^2+10x-1$

-۵۸ $a^2b^2-2ab^2+b^2-c^2d^2+2cd^2-d^2$

-۵۹ $9x^2-3xy+\frac{y^2}{4}-a^2-a-\frac{1}{4}$

-۶۰ $\frac{x^2}{16}-\frac{3}{2}xy+9y^2-\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{3}-\frac{b^2}{4}$

عبارات زیر را به‌حاصل‌ضرب عاملها تجزیه‌کنید :

-۶۱ x^2+5x+4 -۶۲ $a^2-7a+10$

-۶۳ $b^2c^2-5bc-6$ -۶۴ $y^2-7y-30$

-۶۵ $x^2-3ax+2a^2$ -۶۶ $y^2-2by-15b^2$

۶۷- $z^2 - 9yz + 14y^2$ ۶۸- $a^2b^2 + 8abcd + 15c^2d^2$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید :

۶۹- $x^2 - y^2$ ۷۰- $a^4x^4 - b^4$

۷۱- $m^3 + 8$ ۷۲- $(x+1)^3 + y^3$

۷۳- $b^3 - (c+d)^3$ ۷۴- $16a^4 - 81$

۷۵- $m^6 - p^6$ ۷۶- $64a^6 - b^6$

۷۷- $125 - \frac{(a+b)^3}{8}$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید :

۷۸- $2a^3bc - 18ab^3c$

۷۹- $a^3bx - ab^3x$

۸۰- $x^3 - 2x^2 - 3x$

۸۱- $2ax^3y + 6ax^2y^2 + 3x^2y^2 + 9xy^3$

۸۲- $5a^4x - 80b^4x$

۸۳- $a^2 - ab - b - 1$

۸۴- $x^4 + x^3 - x^2 - x$

۸۵- $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$

۸۶- $a^3 + 4a^2 - a - 4$

۸۷- $4a^2c^2x - 4a^2b^2x - 4d^2c^2x + 4b^2d^2x$

۸۸- $a^4b^2 - b^2 - 9a^4 + 9$

۸۹- $a^2y^3 - 8a^2 - x^2y^3 + 8x^2$

۹۰- $x^4 - 13x^2 + 36$

۹۱- $a^4b^4 - 5a^2b^2 + 4$

۹۲- $a^2x^2 - 3ax^2 + 2x^2 - a^2y^2 + 3ay^2 - 2y^2$

۹۳- $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$

فصل دوم

کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت*

حل معادلات به وسیلهٔ تجزیه

۱- مضرب مشترک چند عبارت جبری - مضرب مشترک چند عبارت جبری عبارتی است که به هریك از آنها قابل قسمت باشد. مثلا یکی از مضربهای مشترک دوعبارت جبری $3ab$ و $5b^2$ عبارت $15ab^2$ است.

توجه کنید! اگرمضرب مشترک حاصل را درهرعبارت یا عدد جبری دیگری ضرب کنید، مضرب مشترك دیگری برای دو عبارت $3ab$ و $5b^2$ بدست خواهید آورد؛ پس مضربهای مشترك دویا چند عبارت جبری بیشمارند.

۲- کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت جبری - بین مضربهای مشترك چند عبارت، آن را که درجه‌اش کمتر و ضریب عددیش کوچکترین مضرب مشترك ضرایب عددی آن چند عبارت باشد، کوچکترین مضرب مشترك آن چند عبارت گویند. مثلا کوچکترین مضرب مشترك دوعبارت $3ab$ و $5b^2$، عبارت $15ab^2$ است وکوچکترین مضرب مشترك دوعبارت $2(a+1)$ و $6(a+1)$، $6(a+1)$

* از این قسمت، در برنامه اسمی برده نشده است ولی دانستن آن، برای دانش‌آموزان در عملیات مربوط به کسرها مفید است.

عبارت $6(a+1)$ می‌باشد .

۳ ـ برای تعیین کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری چنین عمل می‌کنند :

الف ـ هریک از عبارتها را به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنند .

ب ـ کوچکترین مضرب مشترک ضرایب عددی آنها را تعیین می‌کنند .

ج ـ بین عاملهای مشترک عبارتها، آنهایی را که نمای بیشتری دارند ، انتخاب نموده در عاملهای غیر مشترک عبارتها و نیز در کوچکترین مضرب مشترک ضرایب عددی آنها ضرب می‌کنند . عبارتی که به این ترتیب بدست می‌آید کوچکترین مضرب مشترک عبارتهاست .

مثال ۱ـ کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای $2a$ و ab و $3a^2$ و ac را تعیین کنید .

چون هریک از عبارتها به صورت حاصل‌ضرب عاملهاست، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک ضرایب عددی را که در این حالت ۶ است، بدست می‌آوریم. سپس بین عاملهای مشترک، a^2 را اختیار می‌کنیم (عامل مشترکی که بزرگترین نمارا دارد) . حال $6a^2$ را در همهٔ عاملهای غیر مشترک که دراین حالت b و c است ، ضرب می‌کنیم ؛ پس $6a^2bc$ کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای فوق خواهد بود .

مثال ۲ـ کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای $a+4$ و $(a+4)^2$ و a^2-16 را بدست آورید .

عبارت a^2-16 را به حاصل ضرب عاملها تبدیل می‌کنیم :

$$a^2-16=(a+4)(a-4)$$

پس $(a+4)^2$ عامل مشترک بابزرگترین‌نما و $a-4$ عامل‌غیر‌مشترک بوده و $(a+4)^2(a-4)$ کوچکترین مضرب مشترک است .

مثال ۳ـ کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای $6x^2-3x$ و $4x^2-1$ و $5-10x$ چنین بدست می‌آید :

ابتدا هریک از عبارتها را تجزیه می‌کنیم :

$$6x^2-3x=3x(2x-1)$$
$$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$$
$$5-10x=-5(2x-1)$$

و ازآنجا کوچکترین مضرب مشترک چنین است :

$$-15x(2x+1)(2x-1)$$

۴ـ حل معادلات به وسیلهٔ تجزیه ـ می‌دانید که اگر دو عبارت جبری A و B به ازای یک یا چند مقدار که به جای حروف آنها قرار دهیم بایکدیگر مساوی شوند، $A=B$ را معادله می‌نامند و آن یک یا چند مقدار را ریشه یا ریشه‌های آن معادله می‌گویند .

مثلا عبارتهای $x+1$ و $2x-4$ به‌ازای $x=5$ باهم برابرند؛ بنابراین $2x-4=x+1$ معادله نام دارد وعدد ۵ ریشهٔ آن است.

طریقهٔ حل‌معادلهٔ درجهٔ اول یک مجهولی‌را می‌دانید؛ به‌کمک تجزیه بعضی از معادلات درجات بالاتر را می‌توان حل کرد .

مثال ۱ـ معادلهٔ $x^2+x-2=0$ را حل کنید .

حل ـ می‌توان نوشت : $(x-1)(x+2)=0$ و این شرط موقعی برقرار است که داشته باشیم : $x+2=0$ یا $x-1=0$ زیرا وقتی که حاصل ضرب چند عامل مساوی صفر باشد ، لازم و کافی است که یکی از عاملهای ضرب صفر باشد .

ازحل دو معادلهٔ آخر $x=-2$ و $x=1$ بدست می‌آید، پس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-2=0$ اعداد ۱ و ۲ـ می‌باشند.

مثال ۲ ـ معادلهٔ $x^2-5x=0$ را حل کنید .

حل ـ در طرف اول معادله ، x عامل مشترك است ، پس می‌توان نوشت : $x(x-5)=0$

در این صورت یا $x=0$ یا $x-5=0$. اما جواب معادلهٔ اخیر، $x=5$ است؛ پس ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x=0$ اعداد ۰ و ۵ است .

مثال ۳ ـ معادلهٔ $x^2-4x=-3$ را حل کنید .

حل ـ عدد ۳ـ را به‌طرف اول معادله می‌بریم، حاصل می‌شود : $x^2-4x+3=0$ ؛ طرف اول را به حاصل‌ضرب عاملها تجزیه می‌کنیم : $(x-3)(x-1)=0$

اکنون می‌گوییم : یا $x-3=0$ که در نتیجه $x=3$.

یا $x-1=0$ که در نتیجه $x=1$.

بنابراین ، جوابهای معادلهٔ $x^2-4x=-3$ ، اعداد ۳ و ۱ می‌باشند .

مثال ۴ـ معادلهٔ $x^3-2x^2-x+2=0$ را حل کنید .

حل ـ طرف اول معادله را به حاصل ضرب عاملها تجزیه می‌کنیم :

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2-1)$$
$$=(x-2)(x-1)(x+1)$$

بنابراین ، معادله چنین نوشته می‌شود :

$$(x-2)(x-1)(x+1)=0$$

که برای حل آن می‌گوییم :

یا $x-2=0$ که از آنجا $x=2$

یا $x-1=0$ که از آنجا $x=1$

یا $x+1=0$ که از آنجا $x=-1$

پس ، ریشه‌های معادلهٔ بالا اعداد ۲ و ۱ و ۱ـ است .

تمرین

کوچکترین‌مضرب مشترك عبارتهای زیررا بدست‌آورید :

۱ـ $3ab$ ، $5a^2b^2$ و $18a^2b$ و $10b^3$

۲ـ $4x-1$ و $4x+1$ و $16x^2-1$

۳ـ x^2-2x و $5(x-2)^4$ و $15x^2$

۴ـ x^2-25 و $(x-5)^2$ و $(x+5)^2$

۵ـ $8a+4$ و $2ab+b$ و $10ax+5x$ و $(2a+1)^2$

۶ـ $9x^2-81$ و x^2-6x+9 و $5x^2-15x$

۷ـ x^2-3x+2 و $x^2-7x+10$

۸ـ $4a^2-9$ و $4a^2-12a+9$ و $10a-15$

۹ـ $x^2-3x-10$ و $x^2-2x-15$ و x^2+5x+6

۱۰ـ $2xy+2x-5y-5$ و $6xy-15y$ و $-2y-2$

-۱۱ x^3-8 و x^2-4 و $3x^2+6x+12$

-۱۲ a^4-81 و a^4+18a^2+81

معادلات زیر را حل کنید:

-۱۳ $x^2-8x=0$

-۱۴ $5x^3-4x^2=0$

-۱۵ $x^2-10x+21=0$

-۱۶ $y^2-2y-15=0$

-۱۷ $x(x+2)=-5x-12$

-۱۸ $x^3-4x=0$

-۱۹ $x^3-7x^2-30x=0$

-۲۰ $y^3-6y^2=-5y$

-۲۱ $y^4-5y^2+4=0$

-۲۲ $x^4-13x^2+36=0$

-۲۳ $z^4-10z^2+9=0$

-۲۴ $x^3+\frac{31}{5}x^2-x-\frac{31}{5}=0$

-۲۵ $x^4-5x^3-4x^2+20x=0$

-۲۶ $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=0$

فصل سوم

کسر

۱ ـ تعریف ـ دو **عدد یا** دو عبارت جبری **A** و B را در نظر می‌گیریم . چنانچه خارج **قسمت** کامل تقسیم A بر B به شکل $\frac{A}{B}$ نمایش داده شود ، آن **را یک** کسر جبری می‌نامند . A را صورت و B را مخرج کسر **می‌گویند** . مانند:

$$\frac{-3}{5} \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{4d} \quad \text{و} \quad \frac{-7}{a^2+5} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-y}{x+y} \quad \text{و} \quad \ldots$$

۲ ـ همهٔ خواص**ی که** در حساب در بارهٔ کسر خوانده‌اید، **در** مورد کسرهای جبری **نیز برقرار** است .

خاصیت اصلی ـ اگر صورت ومخرج کسری را در**یک عدد** یا عبارت جبری (**مخالف** صفر) ضرب و یا بر یک عدد **یا عبارت** جبری (مخالف **صفر) تقسیم** کنیم ، مقدار کسر تغییر نخواهد **کرد .**

مثلاً اگر **صورت** و مخرج کسر $\frac{a}{b}$ را در m $(m\neq 0)$ **ضرب** کنیم ، کسر $\frac{m\cdot a}{m\cdot b}$ **حاصل** می‌شود که با کسر $\frac{a}{b}$ برابر**است ومعمولاً** می‌گویند دو **کسر** $\frac{a}{b}$ **و** $\frac{m\cdot a}{m\cdot b}$ متعادلند .

و نیز چون صورت و مخرج کسر $\frac{16}{12}$ بر ۴ قابل قسمت است ، می‌توان صورت و مخرج آن را بر ۴ تقسیم کرد تا کسر $\frac{4}{3}$ ، که معادل کسر اول است ، بدست آید .

همچنین می‌توانیم صورت ومخرج کسر $\frac{12a^2}{8ab}$ رابر $4a$ تقسیم کنیم تاکسر $\frac{3a}{2b}$ ، معادل آن ، بدست‌آید .

۳ـ ساده کردن کسر ـ ساده‌ترین شکل هر کسر ، کسری است معادل با آن که صورت و مخرجش عامل مشترك نداشته باشند .

برای ساده کردن کسر ، قاعده آن است که صورت ومخرج کسر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کرده وآنها را بر عوامل مشترك تقسیم کنند .

مثال ۱ ـ برای ساده کردن کسر $\frac{5a^2b^3}{15a^3b^2}$ ،چون صورت ومخرج به صورت حاصل ضرب عاملهاست، چنین عمل می کنیم:

عامل مشترك صورت ومخرج راکه $5a^2b^2$ است، تعیین کرده آنها را براین عامل مشترك تقسیم می کنیم :

$$\frac{5a^2b^3}{15a^3b^2}=\frac{b}{3a}$$

مثال ۲ـ برای ساده کردن کسر $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ چنین عمل می کنیم:

صورت ومخرج کسر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کرده سپس عامل مشترك را از صورت و مخرج حذف می کنیم . (یعنی

صورت و مخرج آن را برعامل مشترك تقسیم می کنیم) :

$$\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{x}{x+4}$$

مثال ۳ـ کسر $\frac{a+b}{ax+bx+ay+by}$ را نیز چنین ساده می کنیم :

چون صورت این کسر عامل اول است، مخرج کسررا به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه کرده عامل مشترك را ازصورت ومخرج حذف می کنیم :

$$\frac{a+b}{ax+bx+ay+by}=\frac{a+b}{(a+b)(x+y)}=\frac{1}{x+y}$$

۴ـ تحویل چند کسر به یك مخرج ـ مقصود ازتحویل چند کسر به یك مخرج آن است که کسرهای دیگری مساوی این کسرها با مخرجهای برابر بدست‌آورد .

برای این کار ، می‌توان صورت ومخرج هر کسر را درحاصل ضرب مخرجهای کسرهای دیگر ضرب کرد .

مثال ـ برای آنکه کسرهای $\frac{2}{a}$ و $\frac{5}{b}$ و $\frac{x}{7}$ را به یک مخرج تحویل کنیم، صورت ومخرج هریك ازکسرها را درحاصل ضرب مخرجهای کسرهای دیگر ضرب می کنیم :

$$\frac{2\times 7b}{a\times 7b}=\frac{14b}{7ab} \quad \text{و} \quad \frac{5\times 7a}{b\times 7a}=\frac{35a}{7ab} \quad \text{و} \quad \frac{x\times ab}{7\times ab}=\frac{abx}{7ab}$$

۵ ـ تحویل چند کسر به کوچکترین مخرج مشترك ـ برای

تحویل چند کسر به کوچکترین مخرج مشترك، ابتدا هریك از کسرها را ساده نموده سپس کوچکترین مضرب مشترك مخرجها را تعیین می‌کنند و آن را کوچکترین مخرج مشترك کسرهای مفروض قرار می‌دهند. بعد برای تعیین صورتها، مخرج مشترك را برمخرج هر یك از کسرهای مفروض تقسیم کرده خارج قسمت را در صورت همان کسرضرب می‌کنند، و حاصل ضرب را صورت کسر جدید قرار می‌دهند.

مثال ـ برای تحویل کسرهای $\frac{a^2}{ax+a}$ و $\frac{5}{x^2-1}$ و $\frac{12a}{6x-6}$ به کوچکترین مخرج مشترك چنین عمل می‌کنیم:

هریك از کسرها را ساده می‌کنیم؛

$$\frac{a^2}{ax+a}=\frac{a^2}{a(x+1)}=\frac{a}{x+1}$$

$$\frac{5}{x^2-1}=\frac{5}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{12a}{6x-6}=\frac{12a}{6(x-1)}=\frac{2a}{x-1}$$

کوچکترین مضرب مشترك مخرجها راکه $(x+1)(x-1)$ است مخرج مشترك قرار می‌دهیم؛

$$\frac{a}{x+1}=\frac{?}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{5}{(x+1)(x-1)}=\frac{?}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2a}{x-1}=\frac{?}{(x+1)(x-1)}$$

برای تعیین صورتها، مخرج مشترك را بر مخرج هرکسر تقسیم و خارج قسمت را در صورت همان کسر ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب را صورت آن کسر قرار می‌دهیم:

$$\frac{a}{x+1}=\frac{a(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{5}{(x+1)(x-1)}=\frac{5}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2a}{x-1}=\frac{2a(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

۶ـ جمع جبری کسرها ـ برای جمع کردن کسرها باهم، یا تفریق کردن آنها از هم، دو حالت تمیز می‌دهیم:

حالت اول ـ مخرجها مشترکند ـ دراین حالت مجموع، کسری است که مخرج آن یکی ازمخرجها و صورت آن مجموع جبری صورتهاست.

مثال ـ $\frac{+5}{a+b}+\frac{a-2}{a+b}+\frac{3}{a+b}=\frac{+5+a-2+3}{a+b}=\frac{a+6}{a+b}$

حالت دوم ـ مخرجها مشترك نیستند ـ در این حال ابتدا کسرها را به کوچکترین مخرج مشترك تحویل کرده، سپس مانند حالت اول عمل می‌کنند.

مثال ۱ ـ برای تعیین حاصل عبارت $\frac{a}{a-b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{b}{a+b}$

چون کوچکترین مضرب مشترك مخرجها $(a+b)(a-b)$ است، چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{a}{a-b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{b}{a+b}=$$

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}-\frac{a^2}{(a-b)(a+b)}-\frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=$$

$$\frac{a(a+b)-a^2-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=$$
$$\frac{a^2+ab-a^2-ab+b^2}{(a-b)(a+b)}=$$
$$\frac{b^2}{(a-b)(a+b)}$$

مثال ۲ ـ حاصل عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\frac{2}{3x-3}-\frac{5x}{x^2-3x+2}+\frac{2x+1}{x^2-2x+1}$$

ابتدا مخرج مشترك می‌گیریم. برای‌این کار، همانطور که می‌دانید، باید مخرجها را به صورت حاصل‌ضرب عوامل درآوریم:

$$3x-3=3(x-1)$$
$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

کوچکترین مضرب مشترك مخرجها، یعنی کوچکترین‌مخرج مشترك، $3(x-1)^2(x-2)$ است، ومی‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{2}{3x-3}-\frac{5x}{x^2-3x+2}+\frac{2x+1}{x^2-2x+1}=$$
$$\frac{2}{3(x-1)}-\frac{5x}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x+1}{(x-1)^2}=$$
$$\frac{2(x-1)(x-2)-15x(x-1)+3(x-2)(2x+1)}{3(x-1)^2(x-2)}=$$
$$\frac{-7x^2-2}{3(x-1)^2(x-2)}$$

۷ـ ضرب کسرها ـ حاصل‌ضرب دو یا چند کسر، کسری است که صورتش حاصل ضرب صورتها، و مخرجش حاصل ضرب مخرجهای آن کسرها باشد .

مثلا حاصل‌ضرب دو کسر $\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}$ برابر $\frac{2\times5}{3\times7}$ یا $\frac{10}{21}$ است، زیرا که مقصود از ضرب $\frac{2}{3}$ در $\frac{5}{7}$ **بدست** آوردن $\frac{2}{3}$ از $\frac{5}{7}$ است و می‌دانید که برای‌این کار باید $\frac{5}{7}$ را به ۳ **قسمت** کنیم که می‌شود $\frac{5}{3\times7}$ و ۲ قسمت آن‌را اختیار کنیم، که می‌**شود** $\frac{2\times5}{3\times7}$ ؛

و چون در کسر جبری، اگر به جای حروف مقادیر عددی آنها را قرار دهیم، کسر عددی **حاصل** می‌شود، قاعدهٔ بالا را برای ضرب دو کسر جبری نیز بکار می‌بریم .

مثال ۱ ـ $\frac{3ab}{5xy}\times\frac{2a}{x}=\frac{6a^2b}{5x^2y}$

مثال ۲ ـ $\frac{2}{a^2b}\times\frac{-5}{3ab}\times\frac{b^2}{5a^2}=\frac{-10b^2}{15a^5b^2}=\frac{-2}{3a^5}$

مثال ۳ ـ

$$\frac{5x^2}{x^2-4x+4}\times\frac{2x-4}{15x}=\frac{5x^2(2x-4)}{15x(x^2-4x+4)}=$$
$$\frac{10x^2(x-2)}{15x(x-2)^2}=\frac{2x}{3(x-2)}$$

توجه کنید ـ چون هر عبارت صحیح را می‌توان به صورت کسری با مخرج يك **نوشت**، در ضرب عبارت صحیح در کسر، **کافی** است که آن‌را **در صورت** کسر ضرب کنیم .

مثال ـ

$$(x-2)\times\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{(x-2)(2x+1)}{x^2-4}=$$
$$\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)}=$$
$$\frac{2x+1}{x+2}$$

۸ ـ تقسیم دو کسر ـ می‌دانید که درحساب، برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس کرده در کسر مقسوم ضرب می‌کنند.

مثلا خارج قسمت $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$ برابر $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ یا $\frac{8}{15}$ می‌باشد. زیرا می‌دانیم مقصود از تقسیم $\frac{2}{5}$ بر $\frac{3}{4}$ تعیین کسری است که چون در $\frac{3}{4}$ ضرب شود، کسر $\frac{2}{5}$ حاصل گردد و این کسر برابر است با:

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$$

چنانچه $\frac{8}{15}$ را در $\frac{3}{4}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{8}{15}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$$

چون در کسر جبری، چنانچه به جای حروف مقادیر عددی آنها را قرار دهیم، کسر عددی حاصل می‌شود، قاعدهٔ بالا را برای تقسیم دو کسر جبری نیز بکار می‌بریم.

مثلا خارج قسمت $\frac{3x}{2x-2}\div\frac{2x}{x-1}$ را چنین بدست می‌آوریم:

$$\frac{3x}{2x-2}\div\frac{2x}{x-1}=\frac{3x}{2x-2}\times\frac{x-1}{2x}=\frac{3x(x-1)}{2x(2x-2)}$$

$$=\frac{3x(x-1)}{4x(x-1)}=\frac{3}{4}$$

امتحان:

$$\frac{3}{4}\times\frac{2x}{x-1}=\frac{6x}{4(x-1)}=\frac{3x}{2x-2}$$

مثال دیگر ـ

$$\frac{x^2-1}{x^2-4}\div\frac{x+1}{x+2}=\frac{x^2-1}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x^2-1)(x+2)}{(x^2-4)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}=\frac{x-1}{x-2}$$

امتحان:

$$\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-1}{x^2-4}$$

توجه کنید ـ اگر در **تقسیم**، مقسوم یا مقسوم‌علیه، عبارت صحیح باشد، آن را به **شکل** کسر، با مخرج یك، می‌نویسند و مطابق دستور بالا عمل **تقسیم** را انجام می‌دهند.

مثال ـ

$$\frac{ax-5a}{x}\div(x-5)=\frac{ax-5a}{x}\div\frac{x-5}{1}$$

$$\frac{ax-5a}{x}\times\frac{1}{x-5}=\frac{ax-5a}{x(x-5)}=\frac{a(x-5)}{x(x-5)}=\frac{a}{x}$$

۹ ـ کسری که صورت و مخرج آن یا یکی از آنها شامل کسر باشد، **کسر مرکب** نامیده **می‌شود**. مانند کسرهای مرکب زیر:

$\frac{5a}{x+\frac{1}{x}}$ ، $\frac{\frac{3x+1}{2x}}{a+b}$ و $\frac{x+\frac{2}{a}}{x-\frac{1}{a}}$

۱۰ ـ تبدیل کسر مرکب به کسر ساده ـ برای ساده کردن کسر مرکب حاصل صورت و مخرج آن‌را جداگانه تعیین می‌نمایند و سپس حاصل صورت را برحاصل مخرج تقسیم می‌کنند.

مثال ـ کسر مرکب $\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$، به این ترتیب به کسر ساده تبدیل می‌شود:

حاصل صورت .... $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$

حاصل مخرج .... $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

حاصل کسر مرکب = $\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x^2+1}{x}$

$$\frac{x^2-1}{x}\times\frac{x}{x^2+1}=\frac{x(x^2-1)}{x(x^2+1)}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

تمرین

کسرهای زیر را ساده کنید :

۱- $\frac{12x^2-2xy}{16x^3}$ و $\frac{-32x^2yz}{-64xyz^2}$ و $\frac{14a^2bc^2}{8abcd}$

۲- $\frac{a-b}{b-a}$ و $\frac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}$ و $\frac{b+b^2}{a+ab}$

۳- $\frac{x^4+2ax+a^2}{mx+ma}$ و $\frac{a^2-2a+1}{a-1}$ و $\frac{ax+x^2}{ab-bx}$

۴- $\frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$ و $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

۵- $\frac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$ و $\frac{35+5x+7y+xy}{5+y}$

۶- $\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}$ و $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

۷- $\frac{x^2-a^2-2ab-b^2}{(x+a+b)^2}$ و $\frac{9-m^2}{m^2-7m+12}$

۸- $\frac{a+b+c}{c^2-(a+b)^2}$ و $\frac{x^4-9x^2}{x^4-x^3-6x^2}$

۹- $\frac{(a-b)x}{b^2}-\frac{(a-b)y}{a^2}$ و $\frac{(x-y)^2-(p-q)^2}{(x-p)^2-(q-y)^2}$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید :

۱۰- $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}$

۱۱- $\frac{1}{a^2bc}+\frac{1}{ab^2c}-\frac{1}{abc^2}$

۱۲- $\frac{2}{2x}-\frac{3}{x}+\frac{1}{3x}$

۱۳- $\frac{1}{3a}-\frac{3}{4x}+\frac{1}{x}$

۱۴- $\frac{5}{2ac}-\frac{1}{3ab}-\frac{1}{bc}$

۱۵- $\frac{5}{a}+\frac{7}{ab}+\frac{3}{abc}$

۱۶- $2x+\frac{3-2x}{5}$

۱۷- $1+\frac{a-b}{a+b}$

۱۸- $a+b-\frac{a^2-b^2}{a+2b}$

۱۹- $1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$

۲۰- $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-4}$

۲۱- $\frac{2}{a-3}+\frac{2}{a+4}$

۲۲- $\frac{3}{a-b}-\frac{4}{a+b}$

۲۳- $\frac{a+x}{3}-\frac{5}{a-x}$

۲۴- $\frac{1}{a-b}-\frac{a}{a^2-b^2}$

۲۵- $\frac{4}{3x-3}+\frac{1}{2x-2}$

۲۶- $\frac{3a}{a^2-16}-\frac{2}{a-4}$

۲۷- $\frac{a}{3+a}+\frac{a}{3-a}+\frac{2a^2}{9-a^2}$

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید :

۲۸- $\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}-\frac{4x}{4x^2-1}=\frac{2}{1-2x}$

-۲۹ $\frac{4}{x^2-x}+\frac{3x}{x-1}-\frac{3x^2-2x+6}{x(x-1)}=\frac{2}{x}$

-۳۰ $\frac{3x}{x+2}+\frac{12x}{x^2-4}-\frac{3x^2-12}{x^2-4}=\frac{6}{x-2}$

-۳۱ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2}{1+x}$

-۳۲ $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}=\frac{a^2+1}{a^2-1}$

-۳۳ $\frac{30a}{9a^2-1}+\frac{4}{3a-1}-\frac{5}{3a+1}=\frac{9}{3a-1}$

-۳۴

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}=1$$

-۳۵ $\frac{3a-6b}{a+b}-\frac{5a-6b}{a-b}-\frac{4a-5b}{a+b}+\frac{7a-8b}{a-b}=1$

-۳۶ $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}$

-۳۷ $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{2a}{a-b}$

-۳۸

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید :

-۳۹ $\frac{5ac^3}{21b^3}\times\frac{3bc^2}{8a^2}\times\frac{7a^3b^3}{30c^4}$

-۴۰ $\frac{x^2}{x-y}\times\frac{x^2-y^2}{8}$

-۴۱ $\frac{x^2-1}{3}\times\frac{6a}{x+1}$

-۴۲ $\frac{a^2-b^2}{a}\times\frac{1}{a+b}\times\frac{a}{a-b}$

-۴۳ $\frac{x^2-y^2}{8a^3}\times\frac{16a^2}{(x-y)^2}$

-۴۴ $\frac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\times\frac{2a+1}{ab+3}$

-۴۵ $\frac{x^2-9}{x^2+x}\times\frac{x^2-1}{x-3}$

-۴۶ $\frac{x^2-121}{x^2-4}\times\frac{x+2}{3x+33}$

-۴۷ $\frac{a^2-4b^2}{9x^2}\times\frac{a^2+2ab}{(a-2b)^2}\times\frac{27x^3(a-2b)}{a^2}$

-۴۸ $\frac{x^2-x-2}{p+q}\times\frac{p^2x-q^2x}{x^2-4}\times\frac{x+2}{(p-q)x^3}$

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید :

-۴۹ $\left(a^2-x+\frac{2x^2}{a^2+x}\right)(a^2+x)=a^4+x^2$

-۵۰ $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)=x^3+1$

-۵۱ $\left(1+x+\frac{3+x^2}{1-x}\right)(1-x)=4$

-۵۲ $(a^2-1)\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-1\right)=a^2+1$

-۵۳ $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1}{x}$

۵۴- $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=3$

۵۵- $\left(\frac{a+b}{2a-2b}-\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\times\frac{(a-b)^2}{2b}=a-b$

خارج قسمت تقسیمهای زیر را تعیین کنید :

۵۶- $\frac{6x^2y}{5ab^2}\div\frac{18xy}{25a^2b^2}$

۵۷- $\frac{5a^2b}{7xy^2}\div\frac{15a^3b}{24xy^3}$

۵۸- $\frac{x+y}{2}\div\frac{x^2-y^2}{6}$

۵۹- $\frac{3x}{2x-2}\div\frac{2x}{x-1}$

۶۰- $\frac{x+1}{a^2-1}\div\frac{3x+3}{a-1}$

۶۱- $\frac{3x^2}{a^3+x^3}\div\frac{x}{a^2-ax+x^2}$

۶۲- $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2}\div\frac{x^2+ax}{x-a}$

۶۳- $\frac{x^2-x-2}{a^2-b^2}\div\frac{x-2}{a^2+ab}$

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید :

۶۴- $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)=\frac{a-b}{a+b}$

۶۵- $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\div\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x}$

۶۶- $\left(\frac{2x}{y}\times\frac{3x^2-3y^2}{5}\right)\div\frac{x^2-xy}{10}=\frac{12(x+y)}{y}$

۶۷- $\left(\frac{a^2-x^2}{a+y}\right)\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)\div\frac{ax+x^2}{a^2-y^2}=\frac{a^2(a-y)}{x}$

۶۸- $\left(\frac{a+2}{x-3}\times\frac{3x^2-27}{2a^2-8}\right)\div\frac{ax+3a}{4}=\frac{6}{a^2-2a}$

کسرهای مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت خود تبدیل کنید:

۶۹- $\frac{1+\frac{2}{x-1}}{\frac{3}{2x-2}-5}$

۷۰- $\frac{\frac{3}{x-4}-\frac{3}{x+4}}{1-\frac{x^2}{x^2-16}}$

۷۱- $\frac{\frac{3x}{x-2y}-\frac{3x}{x+2y}}{1-\frac{4y^2-10xy}{4y^2-x^2}}$

۷۲- $\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$

۷۳- $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\div\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}$

فصل چهارم

معادلات کسری

۱ـ معادلات کسری ـ چنانچه معادله شامل کسر، و مجهول معادله در مخرج کسر باشد، آن را معادلهٔ کسری می‌گویند.

مانند معادلات : $\frac{2}{x+1}=5$ و $\frac{1}{x^2-1}+2x=\frac{4}{x}$

۲ـ حل معادلهٔ کسری ـ برای حل معادلهٔ کسری به طریق زیر عمل می‌کنند :

الف ـ کسرهای موجود در دوطرف معادله را ، درصورت امکان، ساده می‌کنند .

ب ـ تمام جمله‌ها را به یک طرف معادله می‌برند .

ج ـ بین تمام جمله‌ها کوچکترین مخرج مشترک می‌گیرند وآنها را به یک کسر تبدیل و کسر حاصل را به ساده‌ترین صورت خود تحویل می‌کنند .

د ـ چون کسری مساوی صفر است که صورت آن صفر باشد، صورت کسر حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهند .

هـ ـ معادله‌ای را که بدین طریق بدست می‌آید ، حل می‌کنند .

مثال ۱ ـ معادلهٔ $\frac{2}{x-1}=-1$ را حل کنید .

حل ـ ابتدا عدد ۱ــ را به طرف اول معادله می‌بریم ؛

$$\frac{2}{x-1}+1=0$$

حال طرف اول را به یک کسر تبدیل می‌کنیم (مخرج مشترک می‌گیریم) ؛

$$\frac{2+x-1}{x-1}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{x+1}{x-1}=0$$

اکنون، چون کسر طرف اول ساده‌تر از این نمی‌شود، صورت آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم ؛ $x+1=0$

و بالاخره معادله را حل می‌کنیم ؛ $x=-1$

جواب معادلهٔ مفروض $x=-1$ است .

مثال ۲ ـ معادلهٔ $\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{x-4}$ را حل کنید .

حل ـ بترتیب چنین عمل می‌کنیم :

$$\frac{x}{x-3}-\frac{x+1}{x-4}=0$$

$$\frac{x(x-4)-(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=0$$

یا

$$\frac{x^2-4x-x^2+2x+3}{(x-3)(x-4)}=0$$

یا

$$\frac{-2x+3}{(x-3)(x-4)}=0$$

پس

$$-2x+3=0$$

و از آنجا

$$x=\frac{3}{2}$$

جواب **معادلهٔ مفروض** $x=\frac{3}{2}$ است .

مثال ۳ ـ معادلهٔ $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x}{x+2}-\frac{x^2+2x-4}{x^2-4}=0$ را حل کنید .

حل ـ $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x}{x+2}-\frac{x^2+2x-4}{(x-2)(x+2)}=0$

$$\frac{(x-1)(x+2)+x(x-2)-(x^2+2x-4)}{(x-2)(x+2)}=0$$

یا $\frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)}=0$

این کسر را ساده می کنیم : $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=0$

یا $\frac{x-1}{x+2}=0$

پس $x-1=0$

و ازآنجا $x=1$

جواب معادلهٔ مفروض $x=1$ است .

مثال ۴ ـ معادلهٔ $\frac{1-\frac{5}{x+2}}{\frac{x}{x+2}}=2$ را حل کنید .

حل ـ ابتدا کسر مرکب طرف اول معادله را به ساده ترین صورت خود در می‌آوریم :

$$1-\frac{5}{x+2}=\frac{x+2-5}{x+2}=\frac{x-3}{x+2}$$

$$\frac{x-3}{x+2}\div\frac{x}{x+2}=\frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)}=\frac{x-3}{x}$$

پس معادله را می‌توان چنین **نوشت** : $\frac{x-3}{x}=2$

وآن را چنین حل کرد : $\frac{x-3}{x}-2=0$

یا $\frac{-x-3}{x}=0$

پس $-x-3=0$

و ازآنجا $x=-3$

جواب معادلهٔ مفروض $x=-3$ است .

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱- $\frac{3x-16}{x}=\frac{5}{3}$

۲- $\frac{5x-5}{x+1}=3$

۳- $\frac{2}{x}+\frac{4}{3x}-\frac{6}{5x}=\frac{52}{15}$

۴- $\frac{3x-7}{4x+2}=\frac{3x-14}{4x-13}$

۵- $\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{7}+\frac{x}{3}$

۶- $x-\frac{x^2-5x}{x-7}=\frac{2}{3}$

۷- $\frac{3}{3-x}+\frac{4}{3+x}=\frac{8x+3}{9-x^2}$

-۸ $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{10}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}$

-۹ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+2}$

-۱۰ $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{2x+4}=\frac{3x-1}{x^2-4}$

-۱۱ $\frac{x+4}{x-1}-\frac{x+3}{1-x}+\frac{x-5}{2x-2}=0$

-۱۲ $\frac{5}{2x-6}-\frac{x+1}{x^2-6x+9}=\frac{1}{3x-9}$

-۱۳ $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+5}{x+6}-\frac{x+6}{x+7}$

-۱۴ $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}$

-۱۵ $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+4}=\frac{5}{x-5}$

-۱۶ $\frac{2}{x}=\frac{5x+5}{x^2-1}$

-۱۷ $\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}-\frac{4}{3}=0$

-۱۸ $\frac{2x-6}{x^2-6x+9}-\frac{6x+3}{4x^2-1}=0$

-۱۹ $\frac{x^2-x+1}{x-1}=2x-\frac{x^2+x+1}{x+1}$

-۲۰ $\frac{x-3}{2x+6}-\frac{x^2+6}{6(x^2-9)}=\frac{x+3}{3x-9}$

-۲۱ $\frac{x+1}{2x-3}-\frac{x^2+7}{4x^2-9}=\frac{2}{2x+3}-\frac{x-1}{6-4x}$

-۲۲ $\frac{3x^2-5}{3x-6}-\frac{7}{6x+12}=x+2+\frac{7}{2x^2-8}$

-۲۳ $\frac{3-2x}{4}+\frac{x}{6}-\frac{6x^2-1}{15-27x}=\frac{2-x}{9}$

-۲۴ $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+1}-\frac{5}{2x-2}=\frac{11}{3x+3}+\frac{3}{1-x^2}$

-۲۵ $\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=\frac{3}{5}$

-۲۶ $\frac{\frac{x}{x+2}-\frac{x-3}{x-2}}{\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}}=\frac{3}{7}$

-۲۷ $\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{5}{6}$

-۲۸ $\frac{\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{3x}}{\frac{1}{x}-4}=\frac{1}{1-16x^2}$

-۲۹ $\frac{\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7-2x}}{1-\frac{4x^2-2}{7+12x-4x^2}}=\frac{16}{9}$

-۳۰ $\frac{1-\frac{1}{\frac{1}{x}+1}}{1+\frac{1}{\frac{1}{x}-1}}=\frac{3}{4}$

فصل پنجم

معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ اول حرفی

۱ـ تعریف ـ اگر در **معادلهٔ** یك مجهولی ، غیر از حرف مجهول ، حرف دیگری **موجود باشد**، معادله را **حرفی** می‌گویند.

مانند معادلهٔ $2x+ax=b$ [illegible] ۱ که در آن ، x مجهول و a و b معلومند .

۲ ـ حل و بحث معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ اول حرفی ـ هر معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ **اول را** ، پس‌از نقل جمل مجهول به یك طرف وجمل معلوم به طرف **دیگر** معادله وساده نمودن آنها، به صورت کلی $ax=b$ می‌توان نوشت .

برای حل چنین معادله‌ای **دو حالت** درنظر می‌گیرند :

حالت اول ـ $a\neq 0$. دراین‌حال طرفین معادله رابر a تقسیم می‌کنند تا $x=\frac{b}{a}$ جواب معادله بدست آید .

حالت دوم ـ $a=0$. دراین حال :

اگر $b\neq 0$ باشد ، معادله به شکل $0\times x=b$ درمی‌آید ، و

هیچ مقداری نمی‌توان یافت که چون در صفر ضرب شود ، حاصل برابر عددی مخالف صفر گردد .

به عبارت دیگر عددی **وجود** نداردکه اگر به جای x دراین معادله قراردهیم دوطرف **معادله** برابرگردد. درچنین صورت معادله را **نشدنی** (ممتنع) می‌گویند .

واگر $b=0$ باشد ، **معادله** به شکل $0\times x=0$ درمی‌آید . و هرعددی به جای x بگذاریم، چون درصفرضرب شود حاصل برابر صفر می‌گردد .

به‌عبارت دیگر هر **عدد دلخواهی** جواب این معادله است. در چنین صورت معادله را **مبهم** می‌گویند .

مثال ۱ـ معادلهٔ $x(a-b)=1-(b-1)x$ را حل و بحث کنید .

حل و بحث :

$$ax-bx=1-bx+x$$

یا

$$ax-x=1$$

یا

$$x(a-1)=1$$

اولاً ـ اگر $a-1\neq 0$ باشد ، طرفین معادله را بر $a-1$ تقسیم می‌کنیم و $x=\frac{1}{a-1}$ ، جواب معادله است .

ثانیاً ـ اگر $a-1=0$ باشد ، معادله به شکل $0\times x=1$ در می‌آیدکه نشدنی **است** وجواب ندارد .

مثال ۲ـ معادلهٔ $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=a-b$ را حل و بحث کنید .

حل و بحث :

$$\frac{x}{a}-\frac{x}{b}-a+b=0$$

$$\frac{bx-ax-a^2b+ab^2}{ab}=0$$

یا
$$bx-ax-a^2b+ab^2=0$$

یا
$$x(b-a)=-ab(b-a)$$

اولاً ـ اگر $b-a\neq 0$ **باشد** ، طرفین معادله را بر $b-a$ تقسیم می‌کنیم و $x=-ab$ **جواب معادله** است .

ثانیاً ـ اگر $b-a=0$ **باشد** معادله به شکل $0\times x=0$ در می‌آید که مبهم است و **جوابهای بیشمار** دارد .

تمرین

معادلات حرفی زیر را حل و بحث کنید :

۱- $a(x-n)=b(a-x)-(a+b)x$

۲- $(x+a)(x-b)=x^2$

۳- $ab(x+1)=a^2+b^2x$

۴- $(x-1)(x-2)=(x-a)^2$

۵- $\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1$

۶- $\frac{a}{b-x}=\frac{b}{a-x}$

۷- $\frac{x}{mn}-\frac{x-m}{m}=\frac{m-n}{n}$

۸- $a-\frac{m+n}{x}=b-\frac{m-n}{x}$

۹- $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$

۱۰- $\frac{a(x-a)}{b}+\frac{b(x+b)}{a}+x=0$

۱۱- $\frac{a(x-a)}{b}+\frac{b(x-b)}{a}=x$

۱۲- $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$

۱۳- $\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}$

۱۴- $\frac{x+a}{a-b}-\frac{x+b}{a+b}=\frac{2x-2b}{a-b}-\frac{x-a}{a+b}$

۱۵- $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

۱۶- $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x+a-b}$

۱۷- $\frac{x+1}{1-x}=\frac{a+b+1}{a+b-1}$

۱۸- $\frac{x+1}{x+a+b}=\frac{x-1}{x+a-b}$

۱۹- $\frac{x+a+b}{a}-\frac{x+b-a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}$

۲۰- $\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$

۲۱- $\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{x+a+b}{x-a}-\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$

فصل ششم

نسبت و تناسب

۱ـ تعریف ـ خارج **قسمت کامل** دو عدد یا دوعبارت جبری A و B را بریکدیگر نسبت آن **دو عدد** یا دو عبارت می‌نامند و به شکل $\frac{A}{B}$ یا A : B نمایش می‌**دهند**.

به A و B دوجزءِ نسبت می‌**گویند** واگر آن را به صورت کسر $\frac{A}{B}$ بنویسند، A را صورت و B را مخرج می‌نامند.

مثلاً نسبت ۳ را بر ۷ به شکل $\frac{3}{7}$ ونسبت ۸/۲ را بر۱۱ به شکل $\frac{8/2}{11}$ ونسبت $\frac{3}{5}$ را بر $\frac{7}{13}$ به شکل $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{13}}$ و نسبت $2a-b$ را بر x به شکل $\frac{2a-b}{x}$ نمایش می‌دهند.

۲ـ چون نسبت دوعدد یا دو عبارت را به شکل کسر نمایش می‌دهند، خواص کسرها، دربارهٔ نسبتها نیز محقق است.

مثلاً هرگاه دوجزءِ نسبت را درعددی (مخالف صفر) ضرب

نموده یا برعددی (مخالف صفر) تقسیم کنیم، مقدار نسبت تغییری نخواهد کرد.

۳ـ اگر چند نسبت متساوی باشند، نسبتی که صورت آن مجموع صورتها ومخرج آن مجموع مخرجهای آن چند نسبت باشد، باهریك ازآنها برابر است.

یعنی:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{A+B+C}{A'+B'+C'}$$

زیرا که اگر فرض **کنیم** $\frac{A}{A'}=q$ و $\frac{B}{B'}=q$ و $\frac{C}{C'}=q$

(چون نسبتها بایکدیگر**مساویند**)، بنابه تعریف تقسیم نتیجه می‌شود:

$$A=A'.q \quad و \quad B=B'.q \quad و \quad C=C'.q$$

حال اگر طرفین این **سه** تساوی را با یکدیگر جمع کنیم:

$$A+B+C=A'q+B'q+C'q$$

یا

$$A+B+C=(A'+B'+C')q$$

که ازتقسیم طرفین این **تساوی** بر $A'+B'+C'$، حاصل می‌شود:

$$\frac{A+B+C}{A'+B'+C'}=q$$

یعنی:

$$\frac{A+B+C}{A'+B'+C'}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

تبصره ـ به همین **طریق** ثابت می‌شود که:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{A+B-C}{A'+B'-C'}=\frac{A-B-C}{A'-B'-C'}$$

مثال ـ ثابت **کنید** که هر یك از نسبتهای $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$، با نسبت $\frac{2A+7B-5C}{2A'+7B'-5C'}$ مساوی است.

اثبات ـ صورت و مخرج نسبت $\frac{A}{A'}$ را درعدد ۴ ، وصورت و مخرج نسبت $\frac{B}{B'}$ را درعدد ۷، وصورت ومخرج نسبت $\frac{C}{C'}$ را در عدد ۵ ـ ضرب می‌کنیم (شمارهٔ ۲) ، بنابراین داریم :

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'} \qquad \frac{4A}{4A'}=\frac{7B}{7B'} \qquad \frac{5C}{5C'}$$

و بنا به شمارهٔ (۳) می‌توان نوشت :

$$\frac{4A}{4A'}=\frac{7B}{7B'}=\frac{-5C}{-5C'}=\frac{4A+7B-5C}{4A'+7B'-5C'}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

۴ـ تعریف ـ هرگاه نسبت $\frac{A}{B}$ برابرنسبت $\frac{C}{D}$ باشد ، تساوی $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ را **تناسب** می‌گویند .

A و B و C و D را **چهار جزء** تناسب می‌نامند .

به A و D **طرفین** ، وبه B و C **وسطین** تناسب می‌گویند .

(زیرا که وقتی تناسب را به شکل $A : B=C : D$ ، در **یك** خط بنویسیم A و D در دوطرف خط و B و C در وسط قراردارند).

۵ـ خاصیت اصلی تناسب ـ در هر تناسب حاصل ضرب طرفین برابر است با حاصل‌ضرب وسطین .

زیراکه درتناسب $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$، اگر دوطرف تساوی رادر B.D ضرب نمایيم ، بدست می‌آید :

$$\frac{A}{B}\times B.D=\frac{C}{D}\times B.D$$

که پس از اختصار می‌شود .

$$\boxed{A.D=B.C}$$

۶ـ هرگاه بین چهار **عبارت** جبری A و B و C و D رابطهٔ $A.D=B.C$ برقرار باشد ، **همواره** می‌توان چهار عبارت مزبور را اجزای تناسبی دانست که در **آن** A و D طرفین (یا وسطین) و B و C وسطین (یا طرفین) آن **تناسب** باشند .

زیراکه اگر طرفین **تساوی** $A.D=B.C$ را بر B.D تقسیم کنیم حاصل می‌شود :

$$\frac{A.D}{B.D}=\frac{B.C}{B.D}$$

که پس‌از اختصار داریم :

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

۷ـ تعیین چهارمین جزء تناسب ـ هرگاه یکی‌از چهار جزء **تناسب مجهول** باشد ، با **استفاده** ازخاصیت اصلی تناسب می‌توان آن را **تعیین**کرد .

مثال ۱ـ برای‌تعیین x **درتناسب** $\frac{2}{3}=\frac{-4}{x}$، ازخاصیت اصلی تناسب استفاده‌کرده **می‌نویسیم** :

$$2x=-12$$

وازآنجا :

$$x=\frac{-12}{2}=-6$$

مثال ۲ـ برای **تعیین چهارمین** جزء تناسب زیر :

$$\frac{a}{a+1}=\frac{?}{a^2-1}$$

چنانچه جزء مجهول **را** به x نشان دهیم ، داریم :

$$\frac{a}{a+1}=\frac{x}{a^2-1}$$

وبنا به خاصیت اصلی در تناسب :

$$x(a+1)=a(a^2-1)$$

حال‌ازاین رابطه، x را به‌ترتیب زیر می‌توانیم بدست‌آوریم:

$$x=\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} \quad \text{یا} \quad x=\frac{a(a^2-1)}{a+1}$$

وازآنجا با فرض $a\neq -1$: $x=a(a-1)$

۸ـ با داشتن تناسب $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (۱) تناسبهای دیگری را می‌توان نتیجه‌گرفت که بعضی‌از صورتهای مهم آنها بدین‌قرار است:

الف ـ $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$ (۲)

یعنی درهرتناسب، ازمعکوس‌نمودن نسبتها، تناسب‌دیگری حاصل می‌شود.

زیراکه بنا به‌خاصیت اصلی (شمارهٔ ۵) ازهردوتناسب رابطهٔ $A.D=B.C$ برقرار است.

ب ـ $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ (۳) و $\frac{D}{B}=\frac{C}{A}$ (۴)

یعنی درهر تناسب از تغییردادن جای طرفین با یکدیگر، یا جای وسطین بایکدیگر، تناسب دیگری حاصل می‌شود.

زیراکه‌بنابه‌خاصیت اصلی، ازتناسب(۱) رابطهٔ $A.D=B.C$ برقراراست. وازهریك ازتناسبهای (۳) و(۴) نیزهمین رابطه برقرار است.

ج ـ $\frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$ (۵)

می‌گویند در تناسب (۱) **ترکیب نسبت** درصورت انجام گرفته است.

زیراکه اگر رابطهٔ **(۵) برقرار** باشد، بنا به خاصیت اصلی در تناسب می‌توان نوشت: $D(A+B)=B(C+D)$

یا $A.D+B.D=B.C+B.D$

که پس‌از ساده‌کردن حاصل می‌شود: $A.D=B.C$

واین‌همان رابطه‌ای **است** که ازتناسب (۱) نیزبدست می‌آید.

د ـ $\frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D}$ (۶)

می‌گویند در تناسب (۱) **تفضیل نسبت** درصورت بعمل آمده است.

هـ ـ $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ (۷)

می‌گویند در تناسب (۱) **ترکیب نسبت** درصورت و **تفضیل نسبت** در مخرج انجام‌**گرفته** است.

درستی تناسبهای (۶) و (۷) را، با همان روشی‌که دربارهٔ اثبات درستی تناسب(۵) بکار بردیم، بسهولت می‌توان تحقیق‌کرد.

۹ ـ **واسطهٔ هندسی** ـ اگر در تناسب $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$، طرفین یا وسطین مساوی باشند، مثلاً $A=D$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{A}$$

وبنابه خاصیت اصلی تناسب، رابطهٔ $A^2=B.C$ برقراراست ومی‌گویند، A **واسطهٔ هندسی** بین B و C است.

به همین طریق اگر $B=C$ باشد (وسطین مساوی باشند)، نتیجه می‌شود $B^2=A.D$. دراین حال B واسطهٔ هندسی بین A و D است.

بنابراین: **واسطهٔ هندسی بین دو عدد، عددی است که مجذور آن برابر حاصل ضرب آن دو عدد باشد.**

مثلاً ۴± واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۲و۸ است زیرا مجذور آن برابرحاصل‌ضرب ۸×۲ می‌باشد. با دانستن ۲و۸ واسطهٔ هندسی بین آنها چنین بدست می‌آید:

$$\pm\sqrt{2\times 8}=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

تمرین

۱ـ ثابت کنید که اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، هریک‌ازنسبتهای مزبور با نسبتهای زیر برابرند:

$$\frac{3a+7b}{3a'+7b'} \quad ; \quad \frac{a-b-5c}{a'-b'-5c'} \quad ; \quad \frac{2a-3b+4c}{2a'-3b'+4c'}$$

۲ـ ثابت کنید که اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ باشد این تساوی محقق است:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}$$

۳ـ از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، تناسبهای زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{a}{a-3b}=\frac{c}{c-3d} \quad ; \quad \frac{7a+b}{b}=\frac{7c+d}{d}$$

$$\frac{a^2+3b^2}{c^2+3d^2}=\frac{a^2-3b^2}{c^2-3d^2} \quad ; \quad \frac{a-2b}{a+2b}=\frac{c-2d}{c+2d}$$

۴ـ چهارمین جزء هر یک از تناسبهای زیر را تعیین کنید:

$$\frac{a+1}{8}=\frac{a^3+1}{?} \quad , \quad \frac{a+2}{5}=\frac{a^2-4}{?} \quad ; \quad \frac{-11}{7}=\frac{?}{21}$$

$$\frac{?}{mx+2x}=\frac{5m-10}{m^2-4} \quad ; \quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{?}{x+3}$$

۵ـ واسطهٔ هندسی A ، B را در هر یك از حالات زیر پیداکنید:

$$\begin{cases}A=3a^2b\\B=12b^3\end{cases} \qquad \begin{cases}A=-5\\B=-45\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=5a-5\\B=20ax^2-20x^2\end{cases} \qquad \begin{cases}A=a^2+4a+4\\B=a^2-6a+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=\dfrac{a^2-2a+1}{a^2+5a+6}\\[2ex]B=\dfrac{a^2+a-2}{a^2+2a-3}\end{cases} \qquad \begin{cases}A=\dfrac{a^2-4}{8}\\[2ex]B=\dfrac{a-2}{2a+4}\end{cases}$$

فصل هفتم

دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول و حل آن

۱ ـ معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول ـ اگر در معادله‌ای پس از نقل جمله‌ها به یك طرف و ساده کردن آن ، **دو حرف مجهول** با نمای یك یافت شوند، **معادله را دومجهولی** درجهٔ اول می‌نامند. مانند معادلهٔ $3x - 2y + 5 = 0$ ، یا معادلهٔ [illegible] $z + 31 - 1$.

۲ـ ریشهٔ معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اولـ معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول $x + y = 12$ رادرنظرمی‌گیریم. مشاهده می‌شودکه چون درآن معادله به جای x عدد ۱ و به جای y عدد ۱۱ قرار گیرد ، دو طرف معادله مساوی می‌شود . همچنین هردو مقدار :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 17 \end{cases} \quad \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots$$

درمعادله صدق می‌کند. بنابراین معادلهٔ مزبورجوابهای بیشماردارد. برای تعیین جوابهای یك معادلهٔ دومجهولی کافی است که به جای

یکی از مجهولها ، عدد دلخواهی قرار دهیم تا معادلهٔ یك مجهولی حاصل شود واز حل آن مجهول **دیگر** را تعیین کنیم .

مثلا درمعادلهٔ $x + y = 12$ ، که بعضی‌از جوابهای‌آن را قبلا دیدید، چنانچه به‌جای x عدد **دلخواهی** مانند ۲ ـ قراردهیم، معادلهٔ یك‌مجهولی $-2 + y = 12$ **حاصل** می‌شودکه ازحل آن‌بدست‌می‌آید $y = 14$ بنابراین مقادیر $\begin{cases} x = -2 \\ y = 14 \end{cases}$ یکی دیگر از جوابهای معادلهٔ $x + y = 12$ است . بطور **کلی هر معادلهٔ دو مجهولی جوابهای بیشمار دارد .**

۳ـ دستگاه معادلات ـ اگر دویاچند معادله، دارای جوابهای مشترکی باشند. می‌گویند **آن معادلات** تشکیل یك دستگاه معادلات را داده‌اند وجوابهای مزبور **را** جوابهای آن دستگاه می‌نامند .

معمولا سمت‌چپ **معادلات** یك دستگاه، آکولادی‌قرارمی‌دهند مثلا دستگاه $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ **یك دستگاه** دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول است که جواب آن $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ می‌باشد . زیراکه این اعداد درهر دومعادلهٔ دستگاه صدق **می‌کند** .

۴ـ دستگاههای متعادل ـ دو یا چند دستگاه را متعادل می‌گویند وقتی که جوابهای هریك از آنها در دستگاه دیگر نیز صدق بکنند و بعکس . **مانند دو** دستگاه متعادل

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2x = 3y \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

که $\begin{cases}x=۳\\y=۲\end{cases}$ جواب مشترك آنها می‌باشد .

هـ حل يك دستگاه معادلات ـ مقصود از حل يك دستگاه معادلات ، تعيين ريشه‌ها يا جوابهای آن است . به عبارت ديگر مقصود از حل يك دستگاه معادلات ، يافتن اعدادی است که چون به جای مجهولها ، در معادلات دستگاه قرار گيرند ، آنها را به تساويهای عددی تبديل نمايند .

۶ـ حل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول ـ هر دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول را به طريقه‌های زير می‌توان حل کرد:

طريقهٔ اول ـ فرض می‌کنيم که بخواهيم دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول $\begin{cases}۳x-۲y=۸\\x+۴y=-۲\end{cases}$ را حل کنيم .

از هر دومعادلهٔ دستگاه x را برحسب y تعيين می‌کنيم (يا y را برحسب x) . از معادلهٔ اول دستگاه حاصل می‌شود :

$$۳x=۲y+۸$$

يا

$$x=\frac{۲y+۸}{۳} \qquad (۱)$$

واز معادلهٔ دوم دستگاه حاصل می‌شود :

$$x=-۴y-۲ \qquad (۲)$$

حال می‌گوييم که چون طرف اول معادلات (۱) و (۲) به ازای جواب دستگاه متساويند ، بايد طرف دوم آنها نيز متساوی باشند ، يعنی :

$$\frac{۲y+۸}{۳}=-۴y-۲$$

يا

$$\frac{۲y+۸+۱۲y+۶}{۳}=۰$$

يا

$$۱۴y+۱۴=۰$$

و از آنجا

$$\boxed{y=-۱}$$

اکنون اگر مقداری را که برای y بدست آورده‌ايم درمعادلهٔ (۱) يا معادلهٔ (۲) (يا هريك از معادلات دستگاه) قرار دهيم ، يك معادلهٔ يك‌مجهولی پديد می‌آيد که ازحل آن مقدار x معلوم می‌شود.

مثلا معادلهٔ (۱) ، با قراردادن ۱ − ، به جای y ، می‌شود:

$$x=\frac{-۲+۸}{۳}$$

و از آنجا

$$\boxed{x=۲}$$

بنابراين $\begin{cases}x=۲\\y=-۱\end{cases}$ جواب دستگاه است .

از آنچه گفته‌شد طريقهٔ اول حل هر دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول به شرح زير است (برای سهولت بيان مجهولات دستگاه را x و y ناميده‌ايم) .

الف ـ **ازهر دومعادلهٔ دستگاه x را برحسب y پيدا می‌کنند. بدين ترتيب دومعادله حاصل می‌شود که طرف اول آنها x است.**

ب ـ **طرف دوم معادلات مزبور را مساوی قرار می‌دهند. بدين ترتيب يك معادلهٔ يك مجهولی برحسب y حاصل می‌شود که آن را حل می‌کنند و مقدار y را بدست می‌آورند .**

ج ـ **مقدار y را در يکی از معادلاتی که x را برحسب y معين کرده (يا در يکی از معادلات دستگاه) قرار می‌دهند ومقدار x را بدست می‌آورند .**

این راه حل را طریقهٔ **حذف قیاسی** می‌گویند.

همانطورکه اشاره شد ممکن است به‌جای آنکه x رابرحسب y ازمعادلات‌دستگاه تعیین‌کنند، y رابرحسب x تعیین‌کرده دستگاه را طبق روش حذف قیاسی حل‌کنند.

مثال ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی‌راحل‌کنید. $\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$

حل ـ ازمعادلهٔ اول دستگاه مقدار y برحسب x چنین است:

$$y = x + 1 \quad *$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نیز y را برحسب x تعیین می‌کنیم:

$$x = 2y - 1$$

یا

$$2y = x + 1$$

و از آنجا

$$y = \frac{x + 1}{2} \quad *$$

بنابراین

$$x + 1 = \frac{x + 1}{2}$$

یا

$$\frac{2x + 2 - x - 1}{2} = 0$$

یا

$$x + 1 = 0$$

و از آنجا

$$\boxed{x = -1}$$

مقدار x را در معادلهٔ $y = x + 1$ قرار می‌دهیم:

$$y = -1 + 1$$

یا

$$\boxed{y = 0}$$

بنابراین $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ جواب دستگاه می‌باشد.

طریقهٔ دوم ـ فرض‌می‌کنیم مقصود حل دستگاه $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ باشد. ازیکی از دومعادله، **مثلا ازمعادلهٔ** دوم، x رابرحسب y پیدا می‌کنیم:

$$x + 4y = -2$$
$$x = -4y - 2$$

وبه‌جای x مساوی‌آن، یعنی $-4y - 2$، را درمعادلهٔ دیگر دستگاه، یعنی $3x - 2y = 8$، قرار **می‌دهیم** تایك معادلهٔ یك‌مجهولی‌برحسب y پدید آید:

$$3(-4y - 2) - 2y = 8$$

از حل این معادله **مقدار y** را بدست می‌آوریم:

$$-12y - 6 - 2y = 8$$

یا

$$-14y = 14$$

و از آنجا

$$\boxed{y = -1}$$

حال مقدار y را در **معادلهٔ** $x = -4y - 2$ قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$x = 4 - 2$$

یا

$$\boxed{x = 2}$$

بنابراین $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ **جواب** این دستگاه است.

ازآنچه‌گفته شد **طریقهٔ** دوم حل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی به شرح زیر است (برای **سهولت** بیان مجهولات دستگاه را x و y نامیده‌ایم).

الف ـ **از یکی از دومعادلهٔ دستگاه x را برحسب y تعیین می‌کنند.**

ب ـ درمعادلهٔ دیگر دستگاه به‌جای x مقداری را که برحسب y یافته‌اند قرارداده معادلهٔ یك مجهولی حاصل را حل می‌کنند تا مقدار y بدست آید .

ج ـ مقدار y را در معادله‌ای که x را برحسب y معین کرده (یا یکی از معادلات دستگاه) قرارداده، مقدار x رامحاسبه می‌کنند .

این راه حل را طریقهٔ **حذف تبدیلی** گویند .

ممکن است به جای آنکه x را برحسب y تعیین کنند ، y را برحسب x تعیین وطبق روش حذف تبدیلی عمل کنند .

مثال ـ دستگاه $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x-y=\frac{5}{3} \end{cases}$ را به قاعدهٔ حذف تبدیلی حل کنید .

حل ـ ازمعادلهٔ دوم دستگاه ، y را برحسب x پیدا می‌کنیم :

$$y=4x-\frac{5}{3}$$

مقدار y را در معادلهٔ دیگر دستگاه یعنی $2x+3y=2$ قرار می‌دهیم :

$$2x+3(4x-\frac{5}{3})=2$$

این معادله را حل می‌کنیم : $2x+12x-5=2$

یا $14x=7$

و از آنجا $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

حال مقدار x را درمعادلهٔ $y=4x-\frac{5}{3}$ قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$y=4(\frac{1}{2})-\frac{5}{3}$$

و از آنجا $\boxed{y=\frac{1}{3}}$

بنابراین $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ جواب این دستگاه است .

طریقهٔ سوم ـ فرض می‌کنیم مقصود حل دستگاه $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+4y=-2 \end{cases}$ باشد. درهردو معادلهٔ دستگاه ضریب x ها (یاضریب y ها) را قرینهٔ یکدیگر می‌کنیم . مثلاً برای آنکه ضریب x ها قرینه شوند ، کافی است طرفین معادلهٔ دوم دستگاه رادرعدد ۳ـ ضرب کنیم. بدین ترتیب دستگاه : $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ -3x-12y=6 \end{cases}$ حاصل می‌شود که با دستگاه فوق متعادل است .

حال طرفین دو معادله را با یکدیگر جمع جبری می‌کنیم تا جمله‌های قرینهٔ 3x و 3x- حذف شده معادله‌ای یك مجهولی برحسب y حاصل شود :

$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ -3x-12y=6 \end{cases}$$
$$\overline{-2y-12y=14}$$

اکنون این معادلهٔ یك مجهولی را حل می‌کنیم :

$$-۱۴y=۱۴$$

$$\boxed{y=-۱}$$

ومقدار y رادریکی‌از معادلات‌دستگاه، مثلادر معادلهٔ $۳x-۲y=۸$، قرار داده مقدار x را تعیین می‌کنیم: $۳x+۲=۸$

یا $۳x=۶$

و از آنجا $\boxed{x=۲}$

بنابراین $\begin{cases}x=۲\\y=-۱\end{cases}$ جواب دستگاه است.

از آنچه‌گفته شد طریقهٔ سوم حل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی به شرح زیر است (برای سهولت بیان مجهولات دستگاه را x و y نامیده‌ایم).

الف ـ **باضرب طرفین معادلات دستگاه درعددی مناسب، ضریب x ها را قرینه می‌کنند.**

ب ـ **طرفین دو معادلهٔ دستگاه حاصل را بایکدیگر جمع می‌کنند تا جمله‌هایی‌که حرف x دارد حذف و معادله‌ای یك مجهولی برحسب y حاصل شود. از حل این معادله مقدار y را بدست می‌آورند.**

ج ـ **مقدار y رادریکی ازمعادلات‌دستگاه قرارداده مقدار x را بدست می‌آورند.**

این راه حل را طریقهٔ **حذف تحویلی** می‌گویند.

ممکن است به جای‌آنکه ضریب x ها را قرینه‌کنند، ضریب yها را قرینه وطبق روش حذف تحویلی عمل‌کنند.

مثال ۱ـ دستگاه دو معادلهٔ **دو** مجهولی $\begin{cases}۳x+۴y=۲۴\\۲x-۵y=-۷\end{cases}$ را به طریقهٔ حذف تحویلی حل کنید.

حل ـ برای حذف **مجهول x** ابتدا طرفین معادلهٔ اول‌دستگاه رادرعدد ۲ وطرفین‌معادلهٔ دوم **دستگاه** رادرعدد۳ـ ضرب‌می‌کنیم:

$$\begin{cases}۶x+۸y=۴۸\\-۶x+۱۵y=۲۱\end{cases}$$

حال طرفین این دومعادله را **بایکدیگر** جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{cases}۶x+۸y=۴۸\\-۶x+۱۵y=۲۱\end{cases}$$

$$۸y+۱۵y=۴۸+۲۱$$

و این معادله را حل **می‌کنیم**: $۲۳y=۶۹$

از آنجا $\boxed{y=۳}$

اکنون مقدار y را **درمعادلهٔ** $۳x+۴y=۲۴$ قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل را حل می‌**کنیم**: $۳x+۱۲=۲۴$

یا $۳x=۱۲$

از آنجا $\boxed{x=۴}$

بنابراین $\begin{cases}x=۴\\y=۳\end{cases}$ **جواب** دستگاه است.

مثال ۲ـ **دستگاه دو** معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}x-y=\frac{۳}{۲}\\۲x+y=\frac{۳}{۲}\end{cases}$ را به قاعدهٔ حذف تحویلی **حل کنید**.

حل ـ برای **حذف** مجهول y ، چون ضریب yها دردومعادله

قرینه هستند ، کافی است که طرفین دو معادلهٔ دستگاه را با یکدیگر جمع کنیم :

$$\begin{cases} x-y=\frac{3}{2} \\ 2x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$3x=3$$

حال این معادله را حل می کنیم : $\boxed{x=1}$

اکنون به‌جای x مقدارش را درمعادلهٔ $2x+y=\frac{3}{2}$ قرار می‌دهیم حاصل می‌شود : $2+y=\frac{3}{2}$

و از آنجا $\boxed{y=-\frac{1}{2}}$

بنابراین $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ جواب دستگاه است .

۷ـ بحث درجوابهای دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول ـ

هرمعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول را پس ازنقل **جمله‌های** مجهول به یك طرف معادله وجمله‌های معلوم به‌طرف‌دیگر ،**وساده کردن** آنها، به صورت کلی $ax+by=c$ می‌توان نوشت ، بنابراین هردستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول رابه صورت کلی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ می‌توان نمایش داد . این دستگاه را به یکی از طریقه‌های بالا مثلا به طریقهٔ حذف تحویلی حل می کنیم. برای این منظور طرفین معادلهٔ اول دستگاه را در b' وطرفین معادلهٔ دوم دستگاه را در $-b$ ضرب می کنیم :

$$\begin{cases} ab'x+bb'y=cb' \\ -ba'x-bb'y=-bc' \end{cases}$$

از جمع طرفین این دو معادله ، **رابطهٔ** زیر حاصل می‌شود :

$$ab'x-ba'x=cb'-bc'$$

یا

$$(ab'-ba')x=cb'-bc' \qquad (1)$$

برحسب آنکه ضریب **x مخالف** صفر یا مساوی صفر باشد ، دو حالت تشخیص می‌دهند ;

حالت اول $ab'-ba'\neq 0$. دراین‌صورت طرفین معادلهٔ (۱) را بر $ab'-ba'$ تقسیم **می کنند و** $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ حاصل می‌شود. حال اگربه‌جای x مقدار**ش را در**یکی‌از معادلات دستگاه قراردهند پس‌ازانجام عملیات لازم $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ بدست می‌آید. بنابراین جواب دستگاه چنین است :

$$\boxed{x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}} \quad \text{و} \quad \boxed{y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}}$$

تساویهای فوق را **دستورهای کرامر** نامیده و به وسیلهٔ آنها می‌توان‌جواب هردستگا**ه‌دومعادلهٔ** دومجهولی‌درجهٔ‌اول‌راتعیین کرد.

مثال ـ دستگاه $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+4y-21=0 \end{cases}$ را به وسیلهٔ دستورهای کرامر حل کنید .

حل ـ ابتدا**مقادیرمعلوم**معادلات دستگاه رابه‌طرف‌دوم‌انتقال می‌دهیم. دستگاه**مزبور به‌**صورت $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ x+4y=21 \end{cases}$ درمی‌آید که‌به‌همان

شکل کلی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ می‌باشد. از مقایسهٔ معادلات این دستگاهها با هم نتیجه می‌گیریم که $a=۲$ و $b=-۱$ و $c=-۳$ و $a'=۱$ و $b'=۴$ و $c'=۲۱$. حال اگر در دستورهای کرامر این مقادیر را به جای حروف قرار دهیم ، جواب دستگاه بدست می‌آید :

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{(-۳)(۴)-(-۱)(۲۱)}{(۲)(۴)-(-۱)(۱)}=\frac{-۱۲+۲۱}{۸+۱}=\frac{۹}{۹}=۱$$

$$\boxed{x=۱}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{(۲)(۲۱)-(-۳)(۱)}{(۲)(۴)-(-۱)(۱)}=\frac{۴۲+۳}{۸+۱}=\frac{۴۵}{۹}=۵$$

$$\boxed{y=۵}$$

بنابراین جواب دستگاه چنین است : $\begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases}$

حالت دوم $ab'-ba'=۰$. دراین‌حال ممکن‌است که طرف دوم معادلهٔ(۱) یعنی $cb'-bc'$ نیزمساوی صفریامخالف صفرباشد:

اولاً ـ اگرداشته‌باشیم $cb'-bc'\neq ۰$، معادلهٔ (۱) به‌صورت $۰\times x=cb'-bc'$ در می‌آید که جواب ندارد . می‌گویند دستگاه **نشدنی** یا **ممتنع** است. دراین‌حال، چون رابطهٔ $ab'-ba'=۰$ را می‌توان به شکل $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و نیز رابطهٔ $cb'-bc'\neq ۰$ را به شکل $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ نوشت، وازمقایسهٔ این‌نسبتهابدست آورد که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$،

می‌توان گفت : **هرگاه بین ضرایب مجهولها و مقادیر معلوم معادلات یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول روابط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ برقرار باشد ، دستگاه نشدنی است .**

مثلاً دستگاه $\begin{cases} x+y=۵ \\ x+y=-۹ \end{cases}$ که در آن $\frac{a}{a'}=\frac{۱}{۱}=۱$ و $\frac{b}{b'}=\frac{۱}{۱}=۱$ و $\frac{c}{c'}=\frac{۵}{-۹}=-\frac{۵}{۹}$ ، روابط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ برقرار است وبنابراین **دستگاه نشدنی** است .

ثانیاً ـ اگر $cb'-bc'=۰$ باشد ، معادلهٔ (۱) به صورت $۰\times x=۰$ درمی‌آید که **جوابهای** بیشمار دارد. دراین حال دستگاه را **مبهم** یا **متماثل می‌گویند** .

چون رابطه‌های $ab'-ba'=۰$ و $cb'-bc'=۰$ را به صورتهای $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ می‌توان نوشت و از مقایسهٔ آنها بدست می‌آید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ و می‌توان گفت :

هرگاه بین ضرایب مجهول و مقادیر معلوم معادلات یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول روابط :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

برقرار باشد ، دستگاه مبهم است .

مثلا در **دستگاه** $\begin{cases} x-y=۷ \\ ۲x-۲y=۱۴ \end{cases}$ که در آن : $\frac{a}{a'}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{b}{b'}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{c}{c'}=\frac{۷}{۱۴}=\frac{۱}{۲}$ ، روابط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ برقرار

است ، بنابراین دستگاه مبهم است .

۸ـ باید دانست که **اگر دستگاهی** شامل **۳ یا** چند معادلهٔ دو مجهولی باشد ، دستگاه **فقط وقتی** دارای جواب است که جواب حاصل از حل دو معادلهٔ دو **مجهولی** آن در سایر **معادلات** دستگاه نیز صدق کند . مثلا دستگاه **۳ معادلهٔ** دو مجهولی زیر :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

که جواب دومعادلهٔ اول آن ، $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ، در معادلهٔ سوم نیزصدق می‌کند دارای جواب‌است. **وجواب** آن همان $x=2$ و $y=1$ است.

ولی دستگاه ۳ معادلهٔ دومجهولی زیر :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+3y=13 \\ x-y=4 \end{cases}$$

که جواب دومعادلهٔ دوم وسوم آن، $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$، درمعادلهٔ دیگر دستگاه صدق نمی‌کند دارای جواب **نیست** .

۹ـ حل چند مسئلهٔ نمونه

مسئلهٔ ۱ـ دستگاه دومعادلهٔ **دومجهولی** زیر را **حل** کنید .

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}+\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x+y-1}{x+2y}=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

حل ـ ابتدا هریک از معادلات دستگاه را ساده می‌کنیم :

معادلهٔ اول :

$$\frac{x+1}{4}+\frac{y-2}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x+1}{4}+\frac{y-2}{3}-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{3x+3+4y-8-6}{12}=0$$

که پس‌از ساده‌شدن به صورت $3x+4y=11$ درمی‌آید .

معادلهٔ دوم :

$$\frac{3x+y-1}{x+2y}=-\frac{5}{7}$$

$$\frac{3x+y-1}{x+2y}+\frac{5}{7}=0$$

$$\frac{21x+7y-7+5x+10y}{7(x+2y)}=0$$

که پس‌از ساده شدن به صورت $26x+17y=7$ درمی‌آید.

اکنون ، دستگاه $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 26x+17y=7 \end{cases}$ را به وسیلهٔ دستورهای کرامر **حل** می‌کنیم :

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{(11)(17)-(+4)(7)}{(3)(17)-(+4)(26)}$$

$$\boxed{x=-3}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{(3)(7)-(11)(26)}{(3)(17)-(4)(26)}$$

$$\boxed{y=5}$$

مسئلهٔ ۲ـ **دستگاه دومعادلهٔ** دومجهولی زیر را حل **کنید** :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+y-1}+\dfrac{1}{x-y+2}=\dfrac{9}{4} \\ \dfrac{5}{x+y-1}-\dfrac{3}{x-y+2}=\dfrac{17}{4} \end{cases}$$

حل ـ طرفین معادلهٔ **اول** دستگاه را در ۳ ضرب وطرفین معادلهٔ حاصل را با طرفین معادلهٔ **دوم** دستگاه جمع می‌کنیم تا کسرهایی که مخرج آنها $x-y+4$ **است** حذف شوند. به این ترتیب:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x+y-1}+\dfrac{3}{x-y+4}=\dfrac{27}{4} \\ \dfrac{5}{x+y-1}-\dfrac{3}{x-y+4}=\dfrac{17}{4} \end{cases}$$

$$\frac{6}{x+y-1}+\frac{5}{x+y-1}=\frac{27}{4}+\frac{17}{4}$$

یا $$\frac{11}{x+y-1}=11$$

یا $$x+y-1=1$$

و از آنجا $$x+y=2 \qquad (1)$$

بار دیگر، طرفین معادلهٔ **اول** دستگاه را در **۵** و طرفین معادلهٔ دوم دستگاه را در ۲- **ضرب** وطرفین معادله‌های حاصل را با یکدیگر جمع می‌کنیم تا کسرهایی **که** مخرج آنها $x+y-1$ است حذف شوند. بدین ترتیب:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x+y-1}+\dfrac{5}{x-y+4}=\dfrac{45}{4} \\ \dfrac{-10}{x+y-1}+\dfrac{6}{x-y+4}=\dfrac{-17}{2} \end{cases}$$

$$\frac{5}{x-y+4}+\frac{6}{x-y+4}=\frac{45}{4}-\frac{17}{2}$$

یا $$\frac{11}{x-y+4}=\frac{11}{4}$$

یا $$x-y+4=4$$

واز آنجا $$x-y=0 \qquad (2)$$

دستگاهی که از معادلات (۱) و (۲) تشکیل گردد با دستگاه مفروض متعادل است. **این دستگاه** را تشکیل می‌دهیم و آن را به یکی از طریقه‌های گذشته **مثلا حذف** تحویلی، حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ x-y=0 & (2) \end{cases}$$

$$2x=2$$

$$\boxed{x=1}$$

اکنون در **معادلهٔ** $x-y=0$ به جای x، مقدارش را **قرار** می‌دهیم، حاصل می‌شود: $1-y=0$

$$\boxed{y=1}$$

مسئلهٔ ۳ـ دستگاه **زیر** را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} 2x+my=3 \\ x+y=3m \end{cases}$$

حل وبحث ـ x را ازمعادلهٔ دوم برحسب y بدست **می‌آوریم**:

$$x=3m-y$$

حال آن **را در معادلهٔ** اول دستگاه قرار می‌دهیم **و خلاصه** می‌کنیم:

$$2(3m-y)+my=3$$

$$my-2y=3-6m$$

$$(m-۲)y=۳-۶m$$

اولاً ـ به شرط $m-۲\neq ۰$ ، طرفین معادلهٔ بالا را بر $m-۲$ تقسیم می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$y=\frac{۳-۶m}{m-۲}$$

که چون این مقدار را به **جای** y درمعادلهٔ $x=۳m-y$ قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$x=\frac{۳m^{۲}-۳}{m-۲}$$

بنابراین به‌شرط $m-۲\neq ۰$ ،جواب دستگاه عبارت‌است‌از:

$$\begin{cases} x=\dfrac{۳m^{۲}-۳}{m-۲} \\ y=\dfrac{۳-۶m}{m-۲} \end{cases}$$

ثانیاًـ به‌شرط $m-۲=۰$ یا $m=۲$ ، معادلهٔ $(m-۲)y=۳-۶m$ به صورت $۰\times y=-۹$ درمی‌آید که نشدنی است.

مسئلهٔ ۴ـ دستگاه زیر را **حل و** بحث کنید :

$$\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=a^{۲}+b^{۲} \\ x+y=a+b \end{cases}$$

حل و بحث ـ از معادلهٔ دوم حاصل می‌شود :

$$y=a+b-x$$

به جای y ، مقدارش را، در معادلهٔ **اول** دستگاه قرار می‌دهیم :

$$(a-b)x+(a+b)(a+b-x)=a^{۲}+b^{۲}$$

که پس‌از اختصار می‌شود : $۲bx=۲ab$

اولاً ـ به‌شرط $b\neq ۰$ ، **طرفین** معادله رابر $۲b$ تقسیم می‌کنیم ، نتیجه می‌شود : $x=a$

که چون در معادلهٔ $x+y=a+b$ قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$y=b$$

پس جواب دستگاه به شرط $b\neq ۰$ چنین است :

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

ثانیاًـ به‌شرط $b=۰$ ، معادلهٔ $۲bx=۲ab$ به‌صورت $۰\times x=۰$ درمی‌آید که مبهم **است .**

مسئلهٔ ۵ـ در **دستگاه زیر** m را طوری تعیین کنید که دستگاه نشدنی باشد .

$$\begin{cases} x+my=۷ \\ ۳x-۲y=۱۱ \end{cases}$$

حل ـ برای آنکه **دستگاه** نشدنی باشد باید : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد ، ولی دراین **دستگاه** $\frac{a}{a'}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{c}{c'}=\frac{۷}{۱۱}$. یعنی $\frac{a}{a'}\neq\frac{c}{c'}$ است.

پس کافی است **داشته باشیم** $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ، یعنی :

$$\frac{۱}{۳}=\frac{m}{-۲}$$

و از آنجا

$$m=\frac{-۲}{۳}$$

مسئلهٔ ۶ـ a و b را بقسمی تعیین کنید که دستگاه **زیر مبهم**

گردد .

$$\begin{cases}(a-2)x+by=4\\ x+3y=2\end{cases}$$

حل ـ برای آنکه این دستگاه مبهم باشد باید داشته باشیم :

یعنی : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$$\frac{a-2}{1}=\frac{b}{3}=\frac{4}{2}$$

که می‌توان نوشت : $\frac{a-2}{1}=2$

و $\frac{b}{3}=2$

و از آنجا $a=4$ و $b=6$

تمرین

دستگاههای زیر را به طریقهٔ حذف قیاسی حل کنید :

۱ـ $\begin{cases}y=3x-1\\ y=2x+4\end{cases}$

۲ـ $\begin{cases}x+3y=2\\ 3x=2y-5\end{cases}$

۳ـ $\begin{cases}5x-8y=19\\ 2x-3y=8\end{cases}$

۴ـ $\begin{cases}3x-y=1\\ 2y-x=8\end{cases}$

۵ـ $\begin{cases}10x+4y=3\\ 20y-5x-4=0\end{cases}$

دستگاههای زیر را به طریقهٔ حذف تبدیلی حل کنید :

۶ـ $\begin{cases}x=y-2\\ 2x-5y=-13\end{cases}$

۷ـ $\begin{cases}x+y=-3\\ 3x-5y=7\end{cases}$

۸ـ $\begin{cases}4x+3y=11\\ 5x-2y=8\end{cases}$

۹ـ $\begin{cases}11x+9y=-19\\ 5x+2y+8=0\end{cases}$

۱۰ـ $\begin{cases}2x+7y+1=0\\ 5x+8y-7=0\end{cases}$

دستگاههای زیر را به طریقهٔ حذف تحویلی حل کنید :

۱۱ـ $\begin{cases}x+2y=3\\ 3x-2y=5\end{cases}$

۱۲ـ $\begin{cases}2x+3y=5\\ 3x+y=4\end{cases}$

۱۳ـ $\begin{cases}4x+3y=0\\ 5x-4y=-3\end{cases}$

۱۴ـ $\begin{cases}4y-3x=9\\ 2x+7y=-6\end{cases}$

۱۵ـ $\begin{cases}7x+8y=19\\ 5x+6y=13.5\end{cases}$

دستگاههای زیر را بااستفاده از دستورهای کرامر حل کنید :

۱۶ـ $\begin{cases}3x+2y=12\\ 2x-y=1\end{cases}$

۱۷ـ $\begin{cases}3x-5y=1\\ 2x-y=3\end{cases}$

۱۸ـ $\begin{cases}3x-y=0\\ 4x+5y=38\end{cases}$

۱۹ـ $\begin{cases}x-2y=-11\\ 3x+7y=19\end{cases}$

۲۰ـ $\begin{cases}1.5x+2.4y=15\\ 0.5x-0.2y=-0.04\end{cases}$

دستگاههای زیر را حل کنید :

۲۱ـ $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{2}{3}\\ \frac{x}{y}-\frac{1}{2}=0\end{cases}$

۲۲ـ $\begin{cases}\frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}=3\\ \frac{12x-7y}{13}=3\end{cases}$

۲۳ـ $\begin{cases}\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{2}\\ \frac{x}{2}=y+2\end{cases}$

۲۴ـ $\begin{cases}\frac{x+1}{y}=\frac{1}{4}\\ \frac{x}{y+1}=\frac{1}{5}\end{cases}$

-۲۵
$$\begin{cases} 2x+\dfrac{y-2}{5}=21 \\ 4y+\dfrac{x-4}{6}=29 \end{cases}$$

-۲۶
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=9 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=5 \end{cases}$$

-۲۷
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=5 \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{y-x}{2}=10 \end{cases}$$

-۲۸
$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}+\dfrac{y-x}{4}=2x-8 \\ \dfrac{2y-3x}{3}+2y=3x+4 \end{cases}$$

-۲۹
$$\begin{cases} \dfrac{13}{x+2y+3}=\dfrac{-3}{4x+5y+6} \\ \dfrac{3}{6x+5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1} \end{cases}$$

-۳۰
$$\begin{cases} \dfrac{5x+7y}{3x+11}=\dfrac{13}{7} \\ \dfrac{11x+27}{7x+5y}=\dfrac{19}{11} \end{cases}$$

-۳۱
$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{5}+\dfrac{3x+2y}{11}=2 \\ \dfrac{-2x}{3}+\dfrac{4x+y-1}{4}=1 \end{cases}$$

-۳۲
$$\begin{cases} \dfrac{4x+5y}{4}=x-y \\ \dfrac{3x-y}{3}+2y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

-۳۳
$$\begin{cases} x+y=3a \\ 3x+5y=13a \end{cases}$$

-۳۴
$$\begin{cases} x+3y=7a \\ 2x+y=7a \end{cases}$$

-۳۵
$$\begin{cases} 3x+2y=6a+4b \\ 5x-y=10a-2b \end{cases}$$

-۳۶
$$\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=a+b \\ 2x-y=10a-2b \end{cases}$$

-۳۷
$$\begin{cases} x+2y=3a+1 \\ 6x-5y=a+6 \end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل و بحث کنید :

-۳۸
$$\begin{cases} x+ay=2a \\ bx+y=ab+1 \end{cases}$$

-۳۹
$$\begin{cases} ax+by=2ab \\ y=x-a \end{cases}$$

-۴۰
$$\begin{cases} 2ax+3by=4ab \\ 5ax+4by=3ab \end{cases}$$

-۴۱
$$\begin{cases} bx+ay=a+b \\ ab(x-y)=a^2-b^2 \end{cases}$$

-۴۲
$$\begin{cases} ax+by=2 \\ 3ax-2by=2 \end{cases}$$

-۴۳
$$\begin{cases} px+qy=p^2-4q^2 \\ y=2x \end{cases}$$

۵۹-
$$\begin{cases}(a-۱)x+(۳b-۲)y=۵\\ ۴(x+y)=۱\end{cases}$$

۶۰-
$$\begin{cases}(a-۲b)x+(۳a-b)y=۷\\ (۲a+۱)x-(۲b+۵)y=-۳\end{cases}$$

۶۱-
$$\begin{cases}x-(۳a+۲b-۱)y=۹a-b\\ ۲x+(a-۳b+۵)y=۳۸\end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

۶۲-
$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{\dfrac{۳ab}{a+b}-a-b}{\dfrac{ab}{a-b}+a-b}\\ y-x=۲a\end{cases}$$

۶۳-
$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{a^۲+b^۲}=\dfrac{۱}{ab}\\ x+y=۲a\end{cases}$$

۶۴-
$$\begin{cases}\dfrac{۲+\dfrac{x-y}{a-b}}{۲-\dfrac{x+y}{a+b}}=۳\\ bx-ay=۰\end{cases}$$

آهان تداعی

فصل هشتم

حل مسائل فکری

۱ـ یکی از موارد **استعمال** جبر ، حل مسائل **فکری** به کمك آن است . چند مثال زیر این **مطلب** را بخوبی روشن می‌کند :

مثال ۱ـ مطلوب است **تعیین** عددی که مجموع نصف و ثلث وربع آن ۱۳ باشد .

حل ـ چنانچه عددی را که مجهول مسئله است برابر $\mathbf{x}$ فرض کنیم ، نصف وثلث وربع آن بترتیب $\frac{x}{۲}$ ، $\frac{x}{۳}$ و $\frac{x}{۴}$ می‌باشند. وچون این عدد باید چنان باشد که مجموع نصف وثلث وربع آن برابر ۱۳ گردد ، می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}=۱۳$$

همانطور که می‌دانید این تساوی معادله‌ای است که ازحل آن می‌توانیم $\mathbf{x}$ را بدست آوریم :

$$\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}-۱۳=۰$$

$$\frac{۶x+۴x+۳x-۱۵۶}{۱۲}=۰$$

یا $$۱۳x-۱۵۶=۰$$

و از آنجا $$x=۱۲$$

بنابراین عدد مطلوب ۱۲ است .

مثال ۲- سن پدری ۴۳ سال وسن پسرش ۷ سال است . معین کنید پس‌از چند سال سن پدر ۴ برابر سن پسر می‌شود .

حل - فرض می‌کنیم پس‌از x سال سن پدر ۴ برابر سن پسر شود . درآن موقع سن پدر $(x+۴۳)$ سال و سن پسر $(x+۷)$ سال خواهد بود. اماصورت مسئله می‌گویدکه درآن موقع باید سن پدر (یعنی $x+۴۳$) چهار برابر سن پسر (یعنی $x+۷$) باشد ، پس می‌نویسیم :

$$۴۳+x=۴(۷+x)$$

این‌معادله‌را حل‌می‌کنیم‌واز آنجامقدار x رابدست‌می‌آوریم :

$$۴۳+x=۲۸+۴x$$

$$x=۵ \text{ سال}$$

مثال ۳- مجموع دوعدد ۱۵۵ و تفاضل آنها ۸۵ است . آن دو عدد کدامند ؟

حل - چنانچه عدد بزرگتر رابرابر x وعددکوچکتر رابرابر y فرض‌کنیم باید : $x+y=۱۵۵$ و $x-y=۸۵$ باشد. این دومعادله راکه‌باهم‌درنظربگیریم، دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی $\begin{cases} x+y=۱۵۵ \\ x-y=۸۵ \end{cases}$ بدست می‌آیدکه از حل آن اعداد مطلوب ، $x=۱۲۰$ و $y=۳۵$ ، تعیین می‌گردند .

تبصره - مثال ۳ را به طریق زیر نیز می‌توان حل‌کرد :

چنانچه عددکوچکتر را x فرض‌کنیم ، عدد بزرگتر $x+۸۵$ خواهدبود وچون مجموع آنها برابر۱۵۵است، می‌توانیم بنویسیم :

$$x+x+۸۵=۱۵۵$$

ازحل‌این‌معادله x یعنی عددکوچکتربدست می‌آید: $x=۳۵$ ، وبنابراین عدد بزرگتر برابر $۱۲۰=۸۵+۳۵$ می‌باشد .

مثال ۴- عددی‌رابراعداد ۵و۶و۱۱تقسیم کرده‌اند، باقیمانده‌ها بترتیب برابر ۲، ۱و۴ ومجموع خارج قسمتها برابر ۱۶ شده است . آن عدد را تعیین‌کنید .

حل - عدد مطلوب را برابر x فرض می‌کنیم .

چون باقیماندهٔ تقسیم x بر۵ برابر عدد ۲ است، پس خارج‌قسمت این‌تقسیم $\frac{x-۲}{۵}$ خواهدبود. به‌همین‌طریق خارج‌قسمت تقسیم x بر ۶ وبر ۱۱ بترتیب $\frac{x-۱}{۶}$ و $\frac{x-۴}{۱۱}$ است. آنطورکه از صورت مسئله پیداست، باید مجموع خارج قسمتها مساوی ۱۶ باشد ، پس می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{x-۲}{۵}+\frac{x-۱}{۶}+\frac{x-۴}{۱۱}=۱۶$$

ازحل این معادله ، عدد مطلوب ، یعنی x ، بدست می‌آید :

$$x=۳۷$$

مثال ۵- موجودی دو نفر بترتیب ۷۶۹۰ ریال و ۳۲۳۰ ریال است. اولی هرماه ۱۰۰ ریال از پول خود برمی‌دارد ودومی هرماه ۱۰۰ریال به پول خود می‌افزاید. معلوم‌کنید پس‌ازچندماه پول‌اولی

۳ برابر پول دومی خواهد شد .

حل ـ فرض می‌کنیم پس‌از x ماه پول اولی ۳برابرپول دومی گردد . چون اولی هر ماه ۱۰۰ ریال از پول خود برمی‌دارد ، پس در x ماه ۱۰۰x ریال از پول خود برداشته و موجودی او برابر (۷۶۹۰ – ۱۰۰x) ریال خواهد شد. به همین طریق معلوم می‌شود که موجودی دومی پس از x ماه برابر (۳۲۳۰ + ۱۰۰x) ریال است . چون پس از این مدت ، موجودی اولی ۳ برابر موجودی دومی می‌گردد ، می‌توانیم بنویسیم :

$$۷۶۹۰ - ۱۰۰x = ۳(۳۲۳۰ + ۱۰۰x)$$

باید این معادله را حل کنیم تا جواب مسئله بدست آید . اما از حل این معادله نتیجه می‌شود :

$$x = -۵$$

چون نمی‌توانیم بگوییم که پس‌از ۵ – ماه پول اولی ۳ برابر پول دومی خواهد شد، این مسئله جواب ندارد. یعنی هرگز درآتیه باشرایط صورت مسئله پول‌اولی ۳برابر پول دومی نخواهد شد. اما جواب بدست‌آمده رامی‌توان بنحوی تعبیر کرد و گفت که ۵ماه‌پیش (یعنی ۵ –) پول‌اولی ۳برابر پول دومی بوده‌است (امتحان کنید!).

مثال ۶ـ کتاب‌فروشی یک‌بار۱۳جلدکتاب‌جبر و۷جلدکتاب حساب فروخت به ۵۳۵ ریال . بار دیگر ۹جلدکتاب جبر و ۱۴ جلد کتاب حساب فروخت‌به ۶۴۵ ریال. تعیین کنید قیمت یک جلدکتاب

جبر ویک جلدکتاب حساب چقدر است ؟

حل ـ قیمت یک جلدکتاب جبر را x ریال و قیمت یک جلد کتاب حساب را y ریال فرض می‌کنیم .

برای فروش بار اول می‌توان نوشت : $۱۳x + ۷y = ۵۳۵$

وبرای‌فروش باردوم می‌توانیم بنویسیم: $۹x + ۱۴y = ۶۴۵$

این دومعادله راکه باهم درنظر بگیریم دستگاه :

$$\begin{cases} ۱۳x + ۷y = ۵۳۵ \\ ۹x + ۱۴y = ۶۴۵ \end{cases}$$

حاصل می‌شودکه از حل آن بدست می‌آید :

$x = ۲۵$ ریال و $y = ۳۰$ ریال

مثال ۷ـ عددی تعیین کنید که مجموع نصف وربع آن ۸ واحد بیش از $\frac{۳}{۴}$ آن باشد .

حل ـ عدد مطلوب رابرابر x فرض می‌کنیم، بنابراین‌داریم:

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴} = \frac{۳}{۴}x + ۸$$

که برای حل این معادله چنین داریم :

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴} - \frac{۳x}{۴} - ۸ = ۰$$

یا

$$\frac{۲x + x - ۳x - ۳۲}{۴} = ۰$$

که می‌توان نوشت :

$$(۳ - ۳)x = ۳۲$$

چون این‌معادله نشدنی است، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ

عددی نیست که مجموع نصف وربع آن ۸ واحد بیش‌از $\frac{۳}{۴}$ آن باشد.

مثال ۸ـ عددی را تعیین کنید که مجموع $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۱۲}$ آن برابر ثلث آن عدد گردد .

حل ـ عددمطلوب را برابر x فرض می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{x}{۴}+\frac{x}{۱۲}=\frac{x}{۳}$$

که اگر این معادله را حل کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{x}{۴}+\frac{x}{۱۲}-\frac{x}{۳}=۰$$

$$\frac{۳x+x-۴x}{۱۲}=۰$$

$$۴x-۴x=۰$$

یا

$$(۴-۴)x=۰$$

چون این معادله مبهم است ، مسئله جوابهای بیشمار دارد .

یعنی مجموع $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۱۲}$ هرعددی برابر ثلث آن عدد است .

۲ـ ازمثالهای فوق بخوبی متوجه می‌شوید که‌برای حل‌مسائل فکری از راه جبر باید نکات زیر را درنظر داشت :

الف ـ مجهول، یا مجهولهای مسئله را تشخیص داده وآنها را باحروف نمایش داد. معمولا حروف آخر الفبای لاتین رابه این منظور انتخاب می‌کنند.

بـ بااستفاده‌ازمفروضات‌مسئله، بین‌معلومات آن‌ومجهولات مزبور رابطه یا روابطی برقرارکرد . باصطلاح معادله یا معادلات

مسئله را تشکیل داد .

ج ـ معادله یا معادلات مسئله را حل وبحث کرد وجوابهایی راکه با شرایط مسئله وفق می‌دهد بدست آورد .

تمرین

۱ ـ دو نفر روی هم ۱۸۷۵۰ ریال دارند . درصورتی‌که پول اولی ۴ برابر پول دومی باشد مقدار پول هریك را تعیین کنید .

۲ ـ مبلغ ۵۵۰ ریال را بین سه نفر بطوری تقسیم کنید که اولی ۵۰ ریال بیش ازدومی و دومی ۱۰۰ ریال بیش‌از سومی سهم ببرد .

۳ ـ مبلغ ۶۵۱۲ ریال رابین سه نفر طوری تقسیم کنید که سهم دومی $\frac{۳}{۴}$ سهم اولی و سهم سومی $\frac{۳}{۴}$ سهم دومی باشد .

۴ ـ سه عدد زوج متوالی تعیین کنید که مجموع آنها ۵۴ باشد .

۵ ـ عددی تعیین کنید که مجموع $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۱}{۸}$ آن برابر ۲۸۳ باشد .

۶ ـ پدری ۲۷ سال وپسرش ۳ سال دارد. چند سال دیگر سن پسر $\frac{۱}{۴}$ سن پدر خواهد شد ؟

۷ ـ به صورت و مخرج کسر $\frac{۱۳}{۱۷}$ چه‌عددی رابابد افزود تاکسرحاصل برابر $\frac{۱۹}{۱۱}$ شود ؟

۸ ـ پول دو نفر روی هم ۱۰۵۰۰ ریال است. اولی $\frac{۱}{۳}$ پول خود و دومی $\frac{۱}{۶}$ پول خود را خرج کردند و باقیماندهٔ پول اولی دو برابر باقیماندهٔ پول دومی شد . پول هریك چقدر بوده است ؟

۹ــ شکوفه ۷۴۸۲ ریال و شیده ۴۰۸ ریال درصندوق پس‌انداز خود دارند وهریك در هر ماه ۳۲۵ ریال پس‌انداز می‌کنند . معین‌کنید پس از چند ماه پول شکوفه ۴ برابر پول شیده می‌شود .

۱۰ــ مبلغی را بین عده‌ای می‌خواستند تقسیم کنند . به هریك ۷ ریال می‌رسید . درموقع تقسیم ۲ نفر براین عده افزوده شد ، درنتیجه به هر یك ۵ ریال رسید . مبلغ وتعداد را تعیین‌کنید .

۱۱ــ دهقانی یك رأس اسب ویك رأس گاو ویك رأس گوسفند را به‌مبلغ ۸۰۰۰ ریال خرید . قیمت گاو ۱۰۰۰ ریال کمتر از قیمت اسب و ۲۴۰ ریال بیشتر از قیمت گوسفند بود . قیمت هر رأس چقدر است ؟

۱۲ــ ساعت فروشی ۱۸ ساعت مردانه و ۱۳ ساعت زنانه را به مبلغ ۲۶۶۰۰ ریال خرید . قیمت هر ساعت زنانه ۴ برابر قیمت هر ساعت مردانه بود . قیمت هریك ازاین دوجنس چقدر است ؟

۱۳ــ تاجری یك توپ پارچه را متری ۲۰۰ ریال خرید. نصف آن را متری ۲۴۰ و $\frac{1}{6}$ آن را متری ۲۷۰ ریال و $\frac{1}{12}$ آن را متری ۳۰۰ ریال و بقیه را متری ۲۰۰ ریال فروخت وجمعاً ۲۲۰۰ ریال سود برد. طول پارچه جقدر است ؟

۱۴ــ دونفر روی‌هم ۳۵۰۰۰ ریال پول داشتند . پس‌ازآنکه اولی $\frac{5}{6}$ ودومی $\frac{7}{8}$ پول خود را خرج کردند پول هر دو مساوی شد . هر یك چه مبلغ داشتند ؟

۱۵ــ کشاورزی حساب کرد که اگر گندم خود را خرواری ۱۶۴۵ریال بفروشد ، قطعه زمینی راکه درنظر دارد خریده و ۵۲۷۰ ریال برایش باقی خواهد ماند. اتفاقاً گندم را بیش‌از خرواری ۱۵۱۵ ریال نخریدند ودرنتیجه بعداز خرید زمین ۴۵۲۰ ریال مقروض شد . تعیین‌کنید مقدار گندم و قیمت زمین را .

۱۶ــ به ۱۸۰ لیتر سرکهٔ لیتری ۴/۵ ریال چند لیتر سرکهٔ لیتری ۶ ریال اضافه‌کنیم تا سرکهٔ ممزوج لیتری ۵ ریال شود ؟

۱۷ــ شخصی به مقداری سرکهٔ لیتری ۱۵ریال آنقدرآب ممزوج کرد که ۲۵ لیتر ممزوج ۳۳۷/۵ ریال قیمت پیدا کرد . معلوم کنید مقدار آب ممزوج در یك لیتر را .

۱۸ــ ۴۰کیلوگرم آب دریا ۳/۲کیلوگرم نمك دارد. چه مقدار آب خالص برآن بیفزاییم‌که ۴۰کیلوگرم ممزوج بیش‌از ۲کیلوگرم نمك نداشته باشد ؟

۱۹ــ عددی ۲ رقمی چنان تعیین‌کنید که مجموع ارقامش برابر ۱۳ بوده ومجموع $\frac{1}{4}$ رقم یکان و $\frac{1}{5}$ رقم دهگان آن برابر ۳ شود .

۲۰ــ هوشنگ با پدرش قرار گذاشت‌که هرروز نمرهٔ خوب گرفت ۵۰ ریال از پدرش بگیرد وهر روز نمرهٔ بدگرفت ۵ ریال به پدرش بدهد . پس‌از ۲۰ روز ۲۸۵ ریال پول داشت . معین‌کنید چند روز نمرهٔ خوب و چند روز نمرهٔ بدگرفته است ؟

۲۱ــ شخصی خانه‌ای راکه ۴۰۰ مترمربع است باباغی‌که۱۲۰۰متر‌مربع است به مبلغ ۱۰۴۰۰۰۰ ریال خرید . اگر خانه ۵۰ مترمربع کمتر و باغ ۲۰۰ مترمربع بیشتر بود ، ۶۰۰۰۰ ریال‌کمتر می‌پرداخت . تعیین‌کنید قیمت یك مترمربع از خانه و باغ را .

۲۲ــ کسری بیابیدکه چون برصورت و مخرج آن ۳ واحد بیفزایند معادل $\frac{4}{5}$ شود، وچون ازصورت ومخرج آن ۳ واحدکم‌کنند معادل $\frac{1}{2}$ شود.

۲۳ــ مطلوب است تعیین ۲ عدد که تفاضل آنها ۱۹۹ بوده و چون برهم تقسیم‌کنیم خارج قسمت ۴ وباقیمانده ۱۰ شود .

۲۴ــ دو اتوموبیل به فاصلهٔ ۶۰۰ کیلومتر از یکدیگر ، دریك لحظه به طرف هم حرکت‌کردند. اولی ساعتی۵۰کیلومتر ودومی ساعتی۵۵کیلومتر راه را طی می‌کند . تعیین کنید که وقتی‌که به هم رسیدند هر یك چقدر راه پیموده‌اند ؟

۲۵ـ ۱۴۰۰ نفر سرباز که مأمور جبهه بودند ، آذوقهٔ ۵۰ روز خود را موجود داشتند . بعد از ۲۰ روز عده‌ای به آنها ملحق گشتند و باقیماندهٔ آذوقهٔ آنها پس از ۱۰ روز دیگر تمام شد. دستهٔ الحاقی چند نفر بوده‌اند ؟

۲۶ـ مجموع ارقام یك عدد دورقمی، ۱۱است. چنانچه جای رقمهای آن‌را تغییر دهیم عددی بدست می‌آید که ازعدد اولی ۴۵ واحد بیشتر است. آن عدد را معلوم کنید .

۲۷ـ بنایی باشاگردش روی‌هم رفته روزی ۲۰۰ریال مزد می‌گیرند. پس‌از مدتی‌که باهم کاری را انجام دادند، بنا ۱۱۲۰ریال مزدگرفت وشاگرد او ۴۸۰ ریال. تعیین کنید اولا چند روزکارکرده‌اند . ثانیاً مزد روزانهٔ هریك چقدر است ؟

۲۸ـ مالکی۱۶۰ رأس‌گاو وگوسفند فروخت به مبلغ ۱۲۷۶۰۰ریال. درصورتی‌که قیمت ۲۰ گوسفند برابر قیمت ۳ گاو و عدهٔ گوسفندها ۳ برابر عدهٔ گاوها باشد ، قیمت یك گاو و یك گوسفند را تعیین کنید .

۲۹ـ از بقالی مقداری روغن به مبلغ ۴۰۰ ریال و مقداری برنج که وزن‌آن۶کیلو ازروغن بیشتراست به مبلغ۲۲۰ریال خریده‌ایم . درصورتی‌که بهای یك‌کیلو روغن ۴ برابر بهای یك‌کیلو برنج باشد، تعیین کنید چه مقدار روغن وچه مقدار برنج خریده‌ایم .

فصل نهم

مختصات نقطه و نمودارها

۱ ـ محور ـ برروی امتداد $x'x$ نقطهٔ o به‌نام‌مبدأ گرفته شده است . برای حرکت برروی این امتداد از مبدأ o دو راه موجود است ، یکی از o به طرف x و دیگری از o به طرف x' که بترتیب یکی را حرکت در جهت مثبت و دیگری را حرکت در جهت منفی اختیارمی‌کنند. (جهت مثبت ازچپ به راست و با این علامت ⟵ نمایش داده می‌شود) (شکل ۱) .



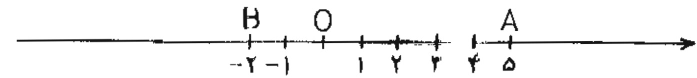
(ش ۱)

خط جهت‌دار $x'ox$ را محور می‌گویند. برروی هر محور، واحدی برای اندازه گیری انتخاب می‌شود .

۲ـ طول نقطهٔ واقع برمحور ـ طول هرنقطه مانند M واقع برمحور (شکل۱) عددی است جبری که قدر مطلق آن اندازهٔ پاره خط OM (برحسب واحد) و علامتش (+) است اگر نقطه روی

نیم خط ox باشد و (−) است هر گاه روی نیم خط 'ox انتخاب شود. طول نقطهٔ M را با $\overline{OM}$ (بخوانید اندازهٔ جبری OM) نشان می‌دهند .

درشکل‌زیر دونقطهٔ A و B بترتیب دارای **طولهای** ۵+و۲− می‌باشند. یعنی ۵+ = $\overline{OA}$ و ۲− = $\overline{OB}$.



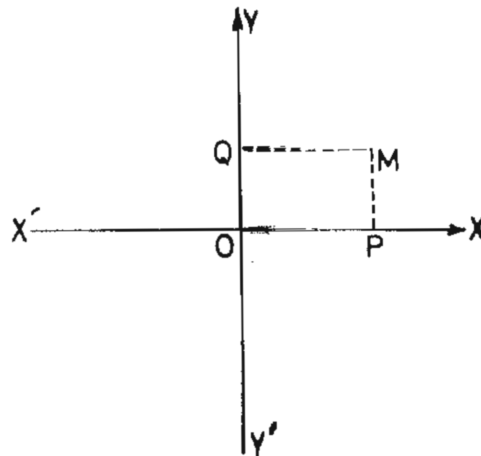
(ش ۲)

۳ـ مختصات نقطه ـ دو محور x'ox و y'oy را عمود برهم اختیار می‌کنند (شکل ۳). **اگر از نقطهٔ M دوعمود MP و MQ** را براین دومحور فرودآورند، **بنا به تعریف** ، $\overline{OP}$ را **طول نقطهٔ M** یا آبسیس(Abscisse)نقطهٔ M و$\overline{OQ}$ راعرض‌نقطهٔ M یا(Ordonnée) نقطهٔ M می‌نامند وطول وعرض نقطهٔ M را مختصات آن می‌گویند.

دومحور عمود برهم ، دستگاه مختصات نام دارد . محور x'ox را محور طولها ومحور y'oy را محور عرضها می‌گویند. و o مبدأ مختصات نام دارد .

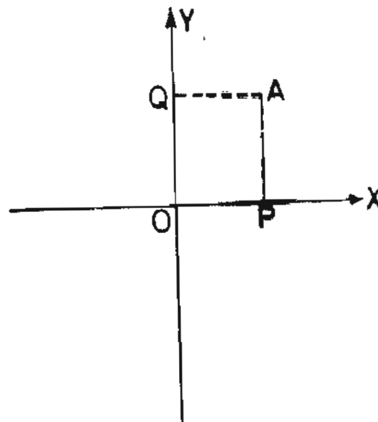
اگرطول نقطهٔ M برابر p **وعرض**‌آن‌برابر q باشد،**می‌نویسند** $M\Big|_q^p$ یا M(p ، q) ومی‌خوانند **M به مختصات p و q .**

۴ـ بعکس اگر مختصات نقطه‌ای معلوم باشد می‌توان جای نقطه را در صفحهٔ دو محور تعیین نمود . مثلاً اگر داشته باشیم :



(ش ۳)

$A\Big|_4^3$ یعنی طول و عرض **نقطهٔ A** بترتیب ۳+ و ۴+ باشد ، برای پیداکردن محل نقطهٔ A ، **ابتدا** طولهای ۳+ و ۴+ را بترتیب بر محورهای طول و عرض **جدا می**‌کنیم تانقاط P و Q مشخص شوند (شکل ۴) و بعد از این **نقاط دوعمود** برمحورها اخراج می‌کنیم ، محل تلاقی این دوعمود **نقطهٔ A** خواهد بود .



(ش ۴)

نمودار

هـ فرض می‌کنیم درجهٔ حرارت هوا در تهران از ساعت ۷ صبح تا ساعت ۶ عصر یکی از روزهای آذرماه به قرار زیر باشد :

ساعت	درجهٔ حرارت	ساعت	درجهٔ حرارت
۷ صبح	−۵°	۱۳	+۶°
۸	−۳°	۱۴	+۸°
۹	−۲°	۱۵	+۷°
۱۰	−۱°	۱۶	+۵°
۱۱	+۲°	۱۷	+۳°
۱۲	+۴°	۱۸	+۱°

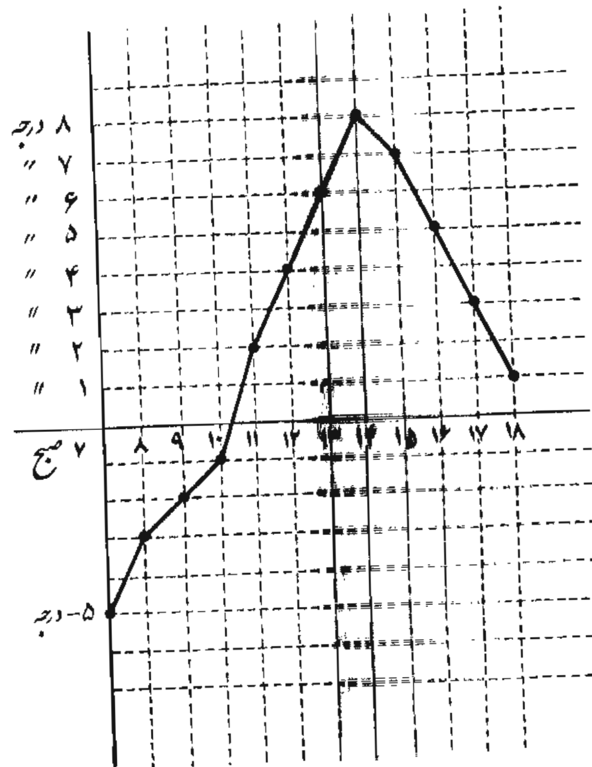
برای اینکه تغییرات درجهٔ حرارت در ساعات مختلف بهتر نمایش داده شود آن را به طریق زیر در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم :

۱ـ پاره خطی به طول a برای واحد زمان ، یعنی ساعت ، اختیار کرده و ساعتهای مختلف را روی محور طولها به وسیلهٔ نقاطی نمایش می‌دهیم .

۲ـ پاره خطی به طول b برای واحد درجهٔ حرارت ، اختیار کرده و درجات مختلف را روی محور عرضها به وسیلهٔ نقاطی نمایش می‌دهیم (a و b مقادیر دلخواهند) .

۳ـ هردو مقدار از ساعت و درجهٔ حرارت که نظیر یکدیگرند نقطه‌ای را در دستگاه مشخص می‌کنند. حال اگر این نقاط را تعیین

کرده متوالیاً به‌هم وصل کنیم ، یک خط شکسته بدست می‌آید که آن را نمودار درجهٔ حرارت در مدت مزبور می‌نامند (شکل ۵) .



(ش ۵)

تمرينات مختلف

عبارات زير را به حاصل ضرب عوامل تجزيه كنيد:

۱- $a^2x^2+ax^2-bx-b^2$

۲- $(ax-mby)^2-m(ay-bx)^2$

۳- $ab(x^2-y^2)-xy(a^2-b^2)$

۴- $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

۵- $a^2-b^2-3c^2-2ac+4bc$

۶- $z^2-z(a+b+2ba)+ab(ab+a+b+1)$

۷- $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-2xyz$

۸- $bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)$

۹- $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

۱۰- $b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+a^2b+ab^2+2abc$

۱۱- $a^{5x}+2a^{4x}+2a^{3x}+2a^{2x}+a^x$

۱۲- $x^2+2ax-b^2-2ab$

۱۳- $x^4-2ax+1-a^2+x^2$

۱۴- $\frac{x^3}{y^2}-8y-x^3+8y^3$

۱۵- $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

۱۶- $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$

۱۷- $(a^2+b^2)^2-9-(a+b)^2(a-b)^2$

۱۸- $(a+b)^2+(a-b)^2-(a^2-b^2)^2-1$

معادلات زيررا به كمك تجزيه به حاصل ضرب عوامل حل كنيد:

۱- $(x^2-4x)^2+7(x^2-4x)+12=0$

۲- $(y^2-2y)^2+(y^2-2y)-12=0$

۳- $(x^2+3-5x)^2+4(x^2+3-5x)+3=0$

۴- $(x+1)^2(x^2+2x-12)+3$[illegible]$=0$

۵- $12-x(x+2)=\left(\frac{6}{x+1}\right)^2$

۶- $(y^2+4y)+\frac{9}{(y+2)^2}=6$

۷- $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$

۸- $(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)-\left(\frac{2}{x}\right)^2$ [illegible]

۹- $x^2-x-18+\frac{72}{x^2-x}=0$

۱۰- $(y+1)^2(y-4)(y+6)+144=0$

۱۱- $(2x^2-2x)^2-(32x^2-32x)+48=0$

۱۲- $(z^2-2z)^2-14(z^2-2z+1)-1=0$

كسرهاى زير را خلاصه كرده وبه ساده‌ترين صورت ممكن بنويسيد:

۱- $$\frac{x+\frac{1}{x-1}-\frac{x}{1-\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

۲- $$\frac{\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}}{1-\frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$$

۳- $\dfrac{(z+1)\left(\dfrac{z+1}{z-1}-\dfrac{z}{z+1}\right)}{1+\dfrac{z+1}{z-1}}$

۴- $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}} \quad \dfrac{1}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

معادلات کسری زیر را حل کنید :

۱- $\dfrac{2x-1}{10+2x}+\dfrac{3x-1}{15-3x}=\dfrac{6x}{25-x^2}$

۲- $\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{2(x+1)}{x-1}-\dfrac{3x^2+1}{3x^2-4x+1}=1$

۳- $\dfrac{4-2x}{3}-\dfrac{4}{6x-3}=\dfrac{1/5x}{x-0/5}-\dfrac{4x^2}{3(2x-1)}$

۴- $\dfrac{2x+3}{1+2x}-\dfrac{2x+5}{7+2x}+\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}=1$

۵- $\dfrac{x+2}{x+5}-\dfrac{x+3}{x+6}-\dfrac{x+5}{x+8}+\dfrac{x+6}{x+9}=0$

۶- $\dfrac{2z^2+2z+1}{z^2+3z+2}+\dfrac{2z^2+2z+3}{z^2+2z+3}-\dfrac{2z^2+2}{z^2+5z+6}=2$

۷- $\dfrac{7}{z^2-1}+\dfrac{3}{z^2-2z+1}=\dfrac{34-9z}{z^3-z^2-z+1}$

۸- $7\left(x-\dfrac{x^2+5}{x-2}\right)=3\left(2x-\dfrac{1-2x^2}{2-x}\right)$

۹- $\dfrac{1}{z^2+2z+1}+\dfrac{2}{z+2z^2+z^3} \quad \dfrac{5}{2z+2z^2}$

۱۰- $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{x+2}{x^3-1}$

معادلات حرفی زیر را حل وبحث کنید :

۱- $\dfrac{x+a-b}{x+a}-\dfrac{x-a+b}{x-a}=\dfrac{2ab(x-b)}{bx^2-a^2b}$

۲- $\dfrac{x-6}{12m+15}-\dfrac{x+4}{8m-10}=\dfrac{5(m+7)x-4m}{150-96m^2}$

۳- $\dfrac{x-a}{x-a-1}-\dfrac{x-a-1}{x-a-2}=\dfrac{x-b}{x-b-1}-\dfrac{x-b-1}{x-b-2}$

۴- $[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2$

۵- $\dfrac{1}{4}x(x-a)-\left(\dfrac{x+a}{2}\right)^2=\dfrac{2a}{3}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$

۶- $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\dfrac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}$

۷- $\dfrac{x^{m+1}-ax^{m-1}}{bx}-\dfrac{ax^{m-1}-x^m}{b}=\dfrac{2x^m}{b}-ax^{m-2}$

۸- $\dfrac{m^2+mx+x^2}{m^3+m^2x+mx^2+x^3}-\dfrac{m^3-m^2x+mx^2}{m^4+2m^2x^2+x^4}=\dfrac{1}{m+x}$

۹- $\dfrac{3ab+1}{a}x=\dfrac{3ab}{a+1}+\dfrac{2a+1}{a(a-1)^2}x+\dfrac{a^2}{(a+1)^3}$

۱۰- $\dfrac{a-x}{a+x}+\dfrac{b-x}{b+x}-\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{b+x}{b-x}=0$

چند مسئله از نسبت و تناسب :

۱- اگر $x=\dfrac{a^2+a+1}{a^2-a-2}$ و $y=\dfrac{a^2-3a+2}{a^2+2a+1}$ باشد ، مطلوب است

تعیین حاصل عبارت $1+(a+1)^3z^2$ در صورتی که z واسطهٔ هندسی بین x و y باشد.

۲- از تناسب $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$$

۳- ازدو رابطهٔ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ و $ad-bc=0$ رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{d^2+c^2}-\frac{y^2}{d^2}$$

۴- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{pa+qb}{pc+qd}=\sqrt{\frac{ab}{cd}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}}=\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}}$$

۵- از دو رابطهٔ $\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ رابطهٔ زیررا نتیجه بگیرید:

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}$$

۶- اگر $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}$$

دستگاههای دو معادلهٔ دومجهولی زیررا حل ودرصورت لزوم بحث کنید:

۱- $$\begin{cases} 7(4x+6y+1)-\frac{5}{2x-3y}=4/5 \\ 5(6x+9y+1)-\frac{7}{2x-3y}=1/5 \end{cases}$$

۲- $$\begin{cases} 2x+y+\frac{6}{3x-2y+5}=4 \\ 3(2x+y-1)+\frac{4}{2y-3x-5}=\frac{17}{3} \end{cases}$$

۳- $$\begin{cases} \frac{x}{y}=\dfrac{\frac{m}{m-1}+\sqrt{2}}{\frac{m}{m+1}-\sqrt{2}} \\ x-y=m\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \frac{x}{y}=\dfrac{\frac{2a}{a-1}-1}{\frac{2a}{a+1}-1} \\ x-y=4a \end{cases}$$

۴- $$\begin{cases} (m-1)x+2my+2=0 \\ 2mx+(m-1)y-(m-1)=0 \end{cases}$$

۵- $$\begin{cases} (2m-3)x-my-(3m-2)=0 \\ -5x+(2m+3)y+5=0 \end{cases}$$

۶- $$\begin{cases} (m-1)x+(3m-2)y=2 \\ (2m-1)x-2y=m+2 \end{cases}$$

۷- $$\begin{cases} \frac{x}{a}=y+a \\ \frac{x}{b}=y+b \end{cases}$$

۸- m و n را بطریقی **تعیین** کنید که جوابهای دستگاه زیر $x=3$ و $y=-3$ باشد:

$$\begin{cases} (3m+2n)x-(m-1)y=4m-3n-1 \\ (2m+n-1)x+(m+n-1)y=4m-n+2 \end{cases}$$

۹- مطلوب است تعیین m بقسمی‌که $x+y=3$ باشد:

$$\begin{cases} (5m+1)x+(3m+2)y=15 \\ (13m-14)x-(2m-5)y=9 \end{cases}$$

۱۰- اولاً تحقیق‌کنید اگر $b-a=1$ باشد دستگاه زیرنشدنی است.
ثانیاً a و b را تعیین‌کنید‌که دستگاه مبهم باشد.
ثالثاً از طریق حذف قیاسی دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} (a+1)x+\frac{y}{a}=5 \\ (b-1)x+\frac{y}{b}=3 \end{cases}$$

۱۱- اولاً t را بقسمی تعیین کنید که دستگاه زیر نشدنی باشد.

ثانیاً اگر $t=\frac{1}{6}$ باشد جوابهای x و y را بدست آورید.

$$\begin{cases} x=\frac{(2-3t)y+5}{2t-3} \\ y=\frac{(5-2t)x-7}{3t-4} \end{cases}$$

۱۲- اولاً m را بقسمی تعیین کنید که دستگاه زیر نشدنی باشد.

ثانیاً m را بقسمی تعیین کنید که x و y برابر باشند.

ثالثاً اگر $m=-2$ باشد از دستور کرامر دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} (2m-3)x-(2-3m)y-5=0 \\ (5-2m)x-(3m-4)y-7=0 \end{cases}$$

پایان